Parcours RMLQA — Année 2018-2019
Université de Tours

Vecteurs dans le plan

(a) Notion de vecteur – on peut définir la notion de vecteur de plusieurs façons différentes, intuitives ou formelles. Pour démarrer nous adopterons la définition suivante :

Définition – *un vecteur du plan est un objet mathématique qui possède (ou encode) trois caractéristiques : une longueur, une direction et un sens.*

Souvent, on convient de noter avec une flèche les vecteurs : $\vec{u}, \vec{v}$ etc. mais, en particulier en mathématiques, on les enlève par la suite.

Dans le plan, si on utilise le système de coordonées usuelles avec une origine O, un axe des x et un axe des y, les vecteurs ont deux *composantes*, qui sont deux nombres réels. On note donc $\vec{u}(a, b)$ ou $\vec{u} = (a, b)$, et en général on préfèrera l'écriture sous forme de colonne pour des raisons qui seront claires plus tard.

Par exemple, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur qui a pour composantes 2 en x et 1 en y. Attention, un vecteur est un objet géométrique qui est en lui-même indépendant du système de coordonnées, mais dont la valeur des composantes peut dépendre du système choisi (difficulté qui sera abordée plus tard).

Définition – La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est également appelée norme, on la note $\|\vec{u}\|$, elle est calculée à l'aide de la distance euclidienne : si $\vec{u} = (a, b)$ alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Cas particulier : le vecteur nul, noté $\vec{0}$ a pour composantes $(0, 0)$, pour lequel aucune direction n'est définie, mais qui a une longueur nulle.

(b) Repère – Deux autres vecteurs particuliers sont très importants, en général notés $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$:

$$\vec{\imath} = (0, 1)\,, \quad \vec{\jmath} = (1, 0)\,.$$

A l'aide d'une origine O, ces deux vecteurs constituent un *repère* $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. A l'aide de ce repère, on peut décomposer n'importe quel vecteur comme une combinaison de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, et définir les coordonnées de n'importe quel point M : $\vec{u} = (a, b)$ et $M(x, y)$, signifient respectivement $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Par exemple, si $M(2, 3)$ et $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, alors

$$\vec{u} = (2, 3) = (2, 0) + (0, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1) = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}.$$

Il faut bien comprendre qu'en décomposant tout vecteur sur la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, nous faisons un choix : de particulariser cette base pour référence. Mais nous pourrions tout à fait prendre une autre base de vecteur, et construire un repère différent. Cette opération (changement de base) sera abordée plus tard.

(c) Vecteurs et bipoints – Dans le plan (et également dans l'espace), un vecteur n'est pas spécifiquement relié à un point, mais deux points (un bipoint) définissent un vecteur unique. Si on choisit par exemple l'origine $O(0, 0)$ comme point de référence, et on se donne un autre point $M(2, 1)$, on définit alors un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ de composantes $(2, 1)$.

Si maintenant $A(1, 2)$ et $B(0, 3)$ sont deux points, alors ces points définissent un unique vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-1, 1)$. Les composantes sont donc obtenues en calculant l'écart entre les deux points sur chaque coordonnée : si $A(x_A, y_B)$ et $B(x_B, y_B)$, alors

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)\,.$$

(d) Vecteurs et droites – si A et B sont deux points, on sait qu'il existe une unique droite passant par A et B notée (AB). Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur *directeur* de la droite (AB), ce qui signifie qu'il donne la direction de cette droite.

Néanmoins, une droite peut être parcourue dans deux sens opposés, et un vecteur comporte toujours un sens. $-\overrightarrow{AB}$ indique un sens opposé à celui de $\overrightarrow{AB}$, mais il reste un vecteur directeur de la même droite.

Le coefficient directeur de la droite est obtenu en faisant le quotient entre la composante en y du vecteur par sa composante en x.

Par exemple, le vecteur $\vec{u} = (-2, -4)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = 2x + 3$. Sont coefficient directeur est bien $a = (-4)/(-2) = 2$.

Réciproquement, si $y = ax + b$ est une droite du plan, alors un vecteur directeur est $\vec{u} = (1, a)$ puisque pour un déplacement de $\Delta x = 1$, on a bien un déplacement de $\Delta y = a$.

(e) Règle de Chasles – Lorsqu'on ajoute deux vecteurs sous forme de bipoint, si l'extrémité de l'un coïncide avec l'origne de l'autre, alors la somme des deux vecteurs se simplifie :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\,,$$

formule que l'on peut vérifier très facilement sur chaque composantes et qui se ramène à l'égalité $(b - a) + (c - b) = c - a$.

(f) Produit scalaire et orthogonalité – étant donné deux vecteurs, il n'existe pas d'opération de multiplication donnant comme résultat un vecteur qui possède des propriétés "raisonnables". Mais il existe un produit appelé *produit scalaire* car il renvoit un nombre (un scalaire), défini comme suit : si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{b} = (a', b')$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb'\,.$$

En particulier on peut remarquer que $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0$ et plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition – les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple : $\vec{u}(1, -2)$ et $\vec{v}(1/2, 1)$ sont perpendiculaires mais pas $\vec{u}$ et $\vec{w}(1, 0)$.

Proposition – deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

(g) Déterminant et parallélisme – De la même façon que pour le produit scalaire, on définit une autre opération entre vecteur qui renvoit un scalaire, mais dont le mode de calcul est plus compliqué (en dimension plus grande que 2).

Définition – on dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si l'un est multiple de l'autre.

En d'autres termes, il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (ou l'inverse).

Définition – étant donné deux vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(a', b')$, on appelle *déterminant* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la quantité

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'\,.$$

Proposition – deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Exemple : $\vec{u}(1,3)$ et $\vec{v}(-2,-6)$ sont colinéaires, mais pas $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Proposition – deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

NB. on voit que le vecteur nul a un statut particulier : il est à la fois colinéaire et orthogonal à tout vecteur.

(h) Applications – brièvement, voici quatre problèmes-type que les outils vus permettent de résoudre :

1. On se donne une droite Δ et un point M du plan. Déterminer l'équation de la droite Δ', perpendiculaire à Δ, passant par M.
2. Même question avec la droite Δ'' qui est parallèle à Δ, passant par le point M.
3. Déterminer l'intersection de deux droites, selon les différents cas (infinité, unique solution, pas de solution).
4. On se donne un point M et une droite Δ. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur Δ. En déduire la distance entre M et Δ.