Parcours RMLQA – 2018-2019
Université de Tours

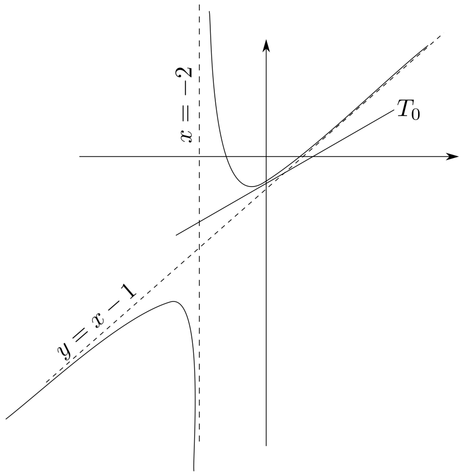
Test final – 1h30

Exercice 1 – Faire l'étude de la fonction $f(x) := \dfrac{x^2+x-1}{x+2}$. On déterminera toutes les asymptotes, ansi que l'équation de la tangente en $x = 0$ avant de faire la représentation graphique.

Solution — $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et on voit qu'on aura probablement une asymptote verticale en $x = -2$. Puis, f est dérivable sur D_f et on obtient $f'(x) = (x^2 + 4x+3)/(x+2)^2$ donc on s'intéresse au signe du trinôme x^2+4x+3. Ses racines sont $x_1 = -3$ et $x_2 = -1$, le trinôme étant négatif entre ses racines.
Limites : on voit facilement que $f(x) = \frac{x^2(1+1/x-1/x^2)}{x(1+2/x)} = x\frac{1+\dots}{1+\dots} \to +\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$. Pour les limites en -2^- et -2^+ on voit que $x^2+x-1 \to 1$ donc $\lim f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ lorsque $x \to -2^-$ et $+\infty$ si $x \to -2^+$.

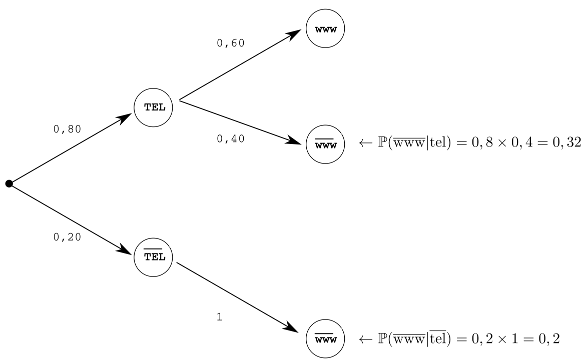
x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
f'		$+$		$-$	||	$-$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Asymptotes : $f(x)/x = \frac{1+1/x-1/x^2}{1+2/x} \to 1$ en $\pm\infty$ donc on a $y = x$ qui est direction asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$. Puis, $f(x) - x = \frac{-x-1}{x+2} \to -1$ en $\pm\infty$ donc $y = x-1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$. La position par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x)-(x-1) = \frac{-3}{x+2}$ et on voit que lorsque $x \to +\infty$, la courbe de f est au dessus de l'asymptote oblique, alors que c'est l'inverse en $-\infty$.
Tangente : la tangente en $x = 0$ est $y = f'(0)(x-0)+f(0) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.
Ci-dessous, le graphe approximatif.



Exercice 2 – Dans une classe, 80% des élèves ont un téléphone portable. Parmi eux, 60% ont une connexion internet sur leur téléphone. Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait un portable sans connexion internet ? (On commencera par faire un arbre)

Solution — Ici, on a un arbre un peu particulier car évidemment, si l'étudiant n'a pas de téléphone, on ne s'intéresse pas à la connexion internet.



On en déduit que la probabilité qu'un étudiant n'ait pas de connexion internet du tout est la somme $\mathbb{P}(\overline{\text{www}}) = 0,32 + 0,2 = 0,52$.

Exercice 3 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 + z + 1 = 0$. On donnera les solutions sous forme algébrique, puis exponentielle.

SOLUTION — $\Delta = 1 - 4 = -3 > 0$ donc les deux solutions sont données en utilisant $\delta = i\sqrt{|\Delta|} = i\sqrt{3}$: $x_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Forme exponentielle : $|x_1| = 1$ et $-\frac{1}{2} = \cos(\frac{2\pi}{3})$, donc on en déduit $x_1 = e^{2i\pi/3}$.
x_2 est le conjugué de x_1, donc $x_2 = e^{-2i\pi/3} = e^{4i\pi/3}$.

Exercice 4 – Soit $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. L'application $(f, \mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? justifiez vos réponses.

SOLUTION — L'application $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ n'est clairement pas surjective car par exemple, -1 n'a pas d'antécédent (dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{R}_-$). Elle n'est donc pas bijective.
En revanche elle est injective : si $(x_1)^2 = (x_2)^2$ alors on sait que $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. Mais comme $x_1, x_2 \leq 0$, alors nécessairement $x_1 = x_2$.

Exercice 5 – Cinq participants (deux femmes, trois hommes) sont engagés sur une course de 100m. Combien de podiums (trois places : (Or, Argent, Bronze) différents peut-on obtenir ? Combien de podium avec les deux femmes ?

SOLUTION — Il faut bien prendre en compte qu'ici on ne cherche pas des combinaisons car l'ordre d'arrivée importe : on s'intéresse à des triplets (ordonnés) constitués d'éléments parmi l'ensemble $A = \{F1, F2, H1, H2, H3\}$.
Nombre de podium total : $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3$ (on a 5 choix pour la médaille d'or, puis 4 pour celle d'argent en enfin 3 pour celle de bronze).
Podium avec les deux femmes : une fois la médaille choisie pour l'unique homme (3 choix : bronze, argent ou or), on doit choisir un homme parmi les 3 pour cette place (3 autres choix). Puis, les deux autres femmes se partagent les deux autres médailles (2 choix). Au final, on a donc $3 \times 3 \times 2 = 18$ podium possibles, qu'on

peut d'ailleurs énumérer entièrement :
$(F1, F2, Hi)$ (où $i = 1..3$) ce qui donne 3 podiums
$(F2, F1, Hi)$ encore 3 podiums et de même pour chacun des cas suivants : $(Hi, F1, F2)$, $(Hi, F2, F1)$, $(F1, Hi, F2)$, $(F2, Hi, F1)$. D'où au final les 18 podiums possibles.

$\llcorner$