Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A\left(0;1;-1\right) \quad ; \quad B\left(1;-1;-8\right) \quad ; \quad C\left(-1;0;0\right)$$

Montrer que le vecteur $\vec{u}\left(3;-2;1\right)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A\left(1;0;0\right) \quad ; \quad B\left(1;1;1\right) \quad ; \quad C\left(7;2;-1\right)$$

Montrer que le vecteur $\vec{u}\left(-1;2;-2\right)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère le plan $\left(\mathcal{P}\right)$ admettant pour équation cartésienne :

$$2{\cdot}x+3{\cdot}y-z+1=0$$

Le vecteur $\vec{u}\left(4;-2;2\right)$ admet-il un représentant inclus dans le plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne suivante :

$$(\mathcal{P}) : \ 5{\cdot}x-2{\cdot}y+z-5=0$$

1. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $(\mathcal{P})$.

2. Déterminer l'équation du plan $(\mathcal{Q})$ parallèle au plan $(\mathcal{P})$ et passant par le point $A\left(5;-1;2\right)$

Exercice 5

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère :

- $(\mathcal{P})$ est le plan passant par $A\left(3;1;2\right)$ et de vecteur normal $\vec{n}\left(1;-4;1\right)$;
- (d) est la droite passant par $B\left(1;4;2\right)$ de vecteur directeur $\vec{u}\left(1;1;3\right)$.

1. Démontrer que le plan $(\mathcal{P})$ a pour équation cartésienne :
$$x-4y+z-1=0$$

2. Montrer que la droite (d) est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 6

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère la droite (d) admettant la représentation paramétrique et le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne définies par :

$$(d) : \left\{\begin{array}{l} x = 3-t \\ y = 2-t \\ z = t \end{array}\right. \quad ; \quad (\mathcal{P}) : \ 2x-4y-2z+3=0$$

1. a. Justifier que la droite (d) est parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

   b. La droite (d) est-elle incluse dans le plan $(\mathcal{P})$?

2. On considère le plan $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :
$$(\mathcal{P}') : \ 2x-4y-2z+c=0 \quad \text{où } c\in\mathbb{R}$$
Déterminer la valeur du paramètre c afin que la droite (d) soit incluse dans le plan $(\mathcal{P}')$.

Exercice 7

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère la droite (d) admettant la représentation paramétrique et le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne définies par :

$$(d) : \left\{\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+2t \end{array}\right. \quad ; \quad (\mathcal{P}) : \ 3x-y+2z+1=0$$

1. Justifier que la droite (d) est sécante au plan $(\mathcal{P})$.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et du plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 8

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :

$$(\mathcal{P}) : \ 2x-y+z+3=0 \quad ; \quad (\mathcal{P}') : \ -4x+2y-2z-1=0$$

Justifier que ces deux plans sont parallèles.

Exercice 9

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. Soit $(\mathcal{P}_1)$ le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et $(\mathcal{P}_2)$ le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

1. Montrer que $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont perpendiculaires.

   On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si, et seulement si, un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$. Montrer qu'une représentation paramétrique de (d) est :
$$\left\{\begin{array}{l} x = -7+2t \\ y = -8+3t \\ z = t \end{array}\right.$$

Exercice 10

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :

$$(\mathcal{P}) : \ x+2y-z+3=0 \quad ; \quad (\mathcal{P}') : \ 4x-2y+z-1=0$$

1. Justifier que ces deux plans sont sécants.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Exercice 11

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On note (D) la droite passant par les points $A\left(1;-2;-1\right)$ et $B\left(3;-5;-2\right)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &+& 2t \\ y &=& -2 &-& 3t \\ z &=& -1 &-& t \end{array}\right. \qquad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

2. On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &-& k \\ y &=& 1 &+& 2k \\ z &=& & & k \end{array}\right. \qquad \text{avec } k\in\mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $4{\cdot}x+y+5{\cdot}z+3=0$.

a. Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ contient la droite (D).

b. Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les cordonnées.

Exercice 12

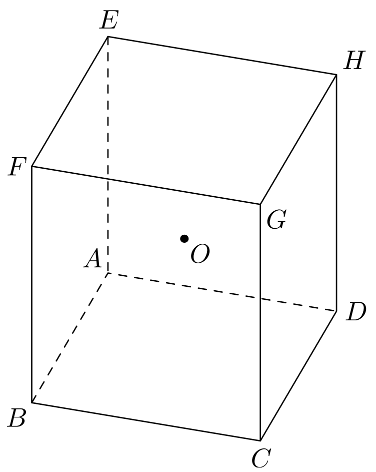
On considère les deux droites de représentation paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2-3t \\ y &=& 1+\ t \\ z &=& -3+2t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \qquad\qquad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 7+2u \\ y &=& 2+2u \\ z &=& -6-\ u \end{array}\right. \quad \text{où } u\in\mathbb{R}$$

Montrer que ces deux droites sont sécantes. Donner les coordonnées du point d'intersection.

Exercice 13

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous de centre O.



Déterminer les coordonnées des points de chacun des sommets du cube ainsi que du point O dans chacun des repères suivants :

a. $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BF})$

b. $(A\,;\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$

c. $(O\,;\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OG}\,;\overrightarrow{OE})$

