COMPLEXES : CALCULS

Exercice 1 : Dans chaque cas, donner la partie réelle et la partie imaginaire de z :

$z = 6 + 3i$	$z = 5i + 2$	$z = 5 - i$	$z = -7$	$z = -2i$	$z = i$
$Re(z) =$	$Re(z) =$	$Re(z) =$	$Re(z) =$	$Re(z) =$	$Re(z) =$
$Im(z) =$	$Im(z) =$	$Im(z) =$	$Im(z) =$	$Im(z) =$	$Im(z) =$

Exercice 2 : Donner la forme algébrique des nombres suivants :

$z_1 = (1 - 4i) + (-3 + 2i)$	$z_2 = (-7 - i) + (4 + 3i)$	$z_3 = 9i - 5 - (3 - i)$

Exercice 3 : Donner la forme algébrique des nombres suivants :

$z_1 = (1 - 4i) \times (-3 + 2i)$	$z_2 = (-7 - i) \times (4 + 3i)$	$z_3 = (9i - 5) \times (3 - i)$
$z_4 = (2 + 3i)^2$	$z_5 = (-7 - i)^2$	$z_6 = (2i)^3$

Exercice 4 :

On considère les nombres $z = 3 - 2i$ et $z' = -1 + 3i$. Donner la forme algébrique des nombres suivants :

$2z - 3z' =$	$-2z + iz' =$	$z^2 =$
$z^3 =$	$zz' =$	$z(i - z') =$

Exercice 5

Dans chaque cas, donner le conjugué de z :

$z = 6 + 3i$	$z = 5i + 2$	$z = 5 - i$	$z = -7$	$z = -2i$	$z = i$
$\bar{z} =$	$\bar{z} =$	$\bar{z} =$	$\bar{z} =$	$\bar{z} =$	$\bar{z} =$

Exercice 6

Calculer $z\bar{z}$ dans chaque cas :

$z = 3 - 4i$ $z\bar{z} =$	$z = 5 + i$ $z\bar{z} =$	$z = -5 + 2i$ $z\bar{z} =$

Exercice 7

Donner la forme algébrique des nombres suivants :

$\boldsymbol{z_1 = \frac{1}{1 + 4i}}$	$\boldsymbol{z_2 = \frac{1}{6 - i}}$	$\boldsymbol{z_3 = \frac{1}{i - 3}}$

Exercice 8

Donner la forme algébrique des nombres suivants :

$\boldsymbol{z_1 = \frac{3 + 4i}{1 + 2i}}$	$\boldsymbol{z_2 = \frac{1 + i}{1 - i}}$	$\boldsymbol{z_3 = \frac{4}{3i}}$
$\boldsymbol{z_4 = \frac{-3}{1 + i\sqrt{2}}}$	$\boldsymbol{z_5 = \frac{5 + 2i}{3i}}$	$\boldsymbol{z_6 = i + \frac{1}{i}}$

Exercice 9 :

Effectuer les calculs suivants :

$$z_1 = (1 + i\sqrt{2})(-3 - 5i)$$

$$z_2 = (1 + i\omega)(RC - 2i)$$

$$z_3 = \frac{1}{1 + i}$$

$$z_4 = \frac{1}{2 - 3i}$$

$$z_5 = \frac{2}{i}$$

$$z_6 = \frac{2 + i}{-3 + i}$$

$$z_7 = \frac{R + i\omega}{C\omega - i}$$

COMPLEXES : EQUATIONS

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$z^2 - 4z + 13 = 0$	$2z^2 - 8z + 10 = 0$	$3z^2 + 6z + 6 = 0$
$\Delta =$	$\Delta =$	$\Delta =$
$z_1 =$	$z_1 =$	$z_1 =$
$z_2 =$	$z_2 =$	$z_2 =$

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$z^2 + 2z + 4 = 0$	$z^2 + 4z + 9 = 0$	$2z^2 - 4z + 6 = 0$
$\Delta =$	$\Delta =$	$\Delta =$
$z_1 =$	$z_1 =$	$z_1 =$
$z_2 =$	$z_2 =$	$z_2 =$

$z^2 + z + 1 = 0$	$2z^2 - z + 1 = 0$	$3z^2 + 2z + 1 = 0$
$\Delta =$	$\Delta =$	$\Delta =$
$z_1 =$	$z_1 =$	$z_1 =$
$z_2 =$	$z_2 =$	$z_2 =$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$(z-1)(z^2 - z + 1) = 0$	$(z-3)(z^2 + 6z + 25) = 0$	$(z+4)(z^2 - 4z + 16) = 0$

EXERCICE 4:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$E_1:\ x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$E_2:\ 9x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$E_3: -7x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$E_4:\ x^2 + 4x + 4 = 0$$

EXERCICE 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

EXERCICE 6:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ dans les inéquations suivantes :

$$I_1:\ x^2 + 2x + 3 > 0$$

$$I_2:\ 9x^2 + 6x + 1 \leq 0$$

$$I_3: -7x^2 - 5x + 2 < 0$$

$$I_4:\ x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

EXERCICE 7:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\frac{z-3}{z-2} = z$

b) $2z + i\bar{z} = 4$

c) $(2+i)z + 4 - i = 0$

d) $\frac{z+i}{z-i} = 5$

EXERCICE 8:

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (Eλ) dépendant du paramètre λ∈R : $x^2 - 3x + 4 = \lambda$.

Pour quelles valeurs de λ, l'équation (Eλ) admet deux solutions distinctes conjuguées ?

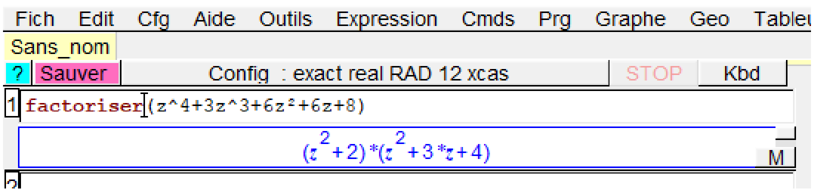
EXERCICE 9:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants : $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$ et $\begin{cases} 2z - z' = 5 \\ iz + 3z' = 7i \end{cases}$

EXERCICE 10:

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 8$.

a) Justifier la copie d'écran ci-dessous obtenue avec le logiciel Xcas.



b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$

EXERCICE 11:

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 17z + 6$.

a) Calculer $P(i)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$

EXERCICE 12:

Soit ω_0 et m deux nombres strictement positifs

Résoudre l'équation $r^2 + 2mr + \omega_0^2 = 0$

EXERCICE 13 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$ dans les cas suivants :

a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ c) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

EXERCICE 14 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = 2i$

b) $z^2 = -15 + 8i$

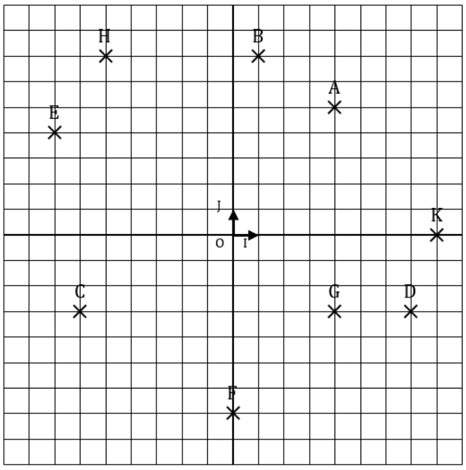
c) $z^2 - (5+3i)z + 7i + 4 = 0$

d) $z^2 + 6iz - 13 = 0$

COMPLEXES : FORME TRIGONOMETRIQUE

Exercice 1 :

On considère le repère $(O;I;J)$ orthonormal.



1. Déterminer les affixes (sous forme algébrique) des points suivants :

A(…………..) B(…………..) C(…………..)

D(…………..) E(…………..) F(…………..)

G(…………..) H(…………..) K(…………..)

2. Placer dans le repère les points suivants :

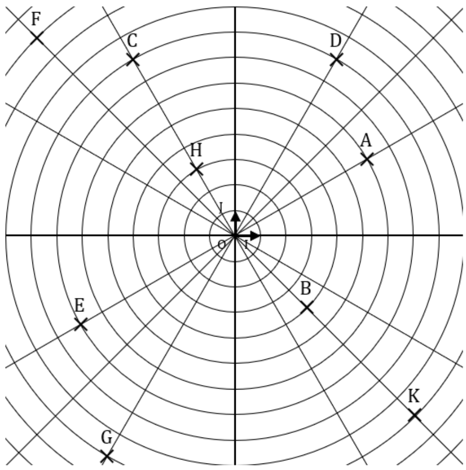
$L(3 + 5i)$ $M(1 - 3i)$ $N(-5)$

$P(5i)$ $Q(-7 + 2i)$ $R(-1 + 7i)$

$S(-5 - 5i)$ $T(-i)$ $X(-8 + i)$

Exercice 2 :

On considère le repère $(O;I;J)$ orthonormal.



1. Déterminer l'affixe (en écriture trigonométrique…) des points A, B, C, D, E; F, G, H et K.

2. Placer dans le repère les points suivants :

$L\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ $M\left(3e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$ $N\left(5e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$

$P(e^{i\pi})$ $Q(5e^{i0})$ $R\left(10e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

$S(5)$ $T(7j)$ $X(-4i)$

RAPPELS :

Trigonométrique → Algébrique

$\boxed{a = \rho.\cos\theta}$ $\boxed{b = \rho.\sin\theta}$

Algébrique → Trigonométrique

$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho}$ $\boxed{\cos\theta = \frac{a}{|z|}}$ $\boxed{\sin\theta = \frac{b}{|z|}}$

EXERCICE 3

a. Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants :

$z_1 = [\ 3\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ]$ $a =$ $b =$ donc $z_1 =$	$z_2 = [\ 4\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ]$ $a =$ $b =$ donc $z_2 =$	$z_3 = [\ 7\ ;\ \pi\ ]$ $a =$ $b =$ donc $z_3 =$	$z_4 = [\ 2\ ;\ 0\ ]$ $a =$ $b =$ donc $z_4 =$
$z_5 = [\ 5\ ;\ \frac{-\pi}{6}\ ]$ $a =$ $b =$ donc $z_5 =$	$z_6 = [\ \sqrt{2}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ ]$ $a =$ $b =$ donc $z_6 =$	$z_7 = [\ 3\ ;\ \frac{5\pi}{6}\ ]$ $a =$ $b =$ donc $z_7 =$	$z_8 = [\ \sqrt{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ]$ $a =$ $b =$ donc $z_8 =$

b. Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants :

$z_1 = [\ 4\ ;\ \frac{-\pi}{4}\ ]$ $z_2 = [\ 5\sqrt{3}\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ]$ $z_3 = [\ 3\sqrt{2}\ ;\ \frac{-3\pi}{4}\ ]$ $z_4 = [\ 7\sqrt{2}\ ;\ 0\ ]$ $z_5 = [\ 2\sqrt{3}\ ;\ \frac{-2\pi}{3}\ ]$

EXERCICE 4

a. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres suivants :

$z_1 = 3$ $\lvert z_1\rvert =$ $\theta =$ donc $z_1 = [\quad ;\quad]$	$z_2 = 2i$ $\lvert z_2\rvert =$ $\theta =$ donc $z_2 = [\quad ;\quad]$	$z_3 = -5$ $\lvert z_3\rvert =$ $\theta =$ donc $z_3 = [\quad ;\quad]$	$z_4 = -\sqrt{2}\ i$ $\lvert z_4\rvert =$ $\theta =$ donc $z_4 = [\quad ;\quad]$

b. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres suivants :

$z_1 = 1 + i$ $\lvert z_1\rvert =$ $\cos\theta =$ $\sin\theta =$ donc $\theta =$ donc $z_1 = [\quad ;\quad]$	$z_2 = 3 - 3i$ $\lvert z_2\rvert =$ $\cos\theta =$ $\sin\theta =$ donc $\theta =$ donc $z_2 = [\quad ;\quad]$	$z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ $\lvert z_3\rvert =$ $\cos\theta =$ $\sin\theta =$ donc $\theta =$ donc $z_3 = [\quad ;\quad]$	$z_4 = 2\sqrt{3} - 2i$ $\lvert z_4\rvert =$ $\cos\theta =$ $\sin\theta =$ donc $\theta =$ donc $z_4 = [\quad ;\quad]$

c. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres suivants :

$z_1 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $z_2 = -\frac{3}{2} - 3i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $z_3 = 5\sqrt{2} - 5i\sqrt{2}$ $z_4 = 5 + 3i^{(*)}$ $z_5 = 2 + 7i^{(*)}$

(pour les $^{(*)}$, on donnera une approximation <u>en radians</u> de l'angle θ)

EXERCICE 5 :

Déterminer les modules et les arguments principaux des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i \quad ; \quad z_2 = 2 \quad ; \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad z_4 = i \quad ; \quad z_5 = -3 + i\sqrt{3}$$

$$z_6 = -\frac{5}{4} \quad ; \quad z_7 = -5i \quad ; \quad z_8 = ki \quad (k > 0) \quad ; \quad z_9 = k \quad (k > 0)$$

$$z_{10} = ki \quad (k < 0) \quad ; \quad z_{11} = k \quad (k < 0)$$

EXERCICE 6 :

1. Déterminer les modules et les arguments principaux des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - isin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad z_3 = -2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2isin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

2. Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$z_4 = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \; ; \; z_5 = \cos(\pi) + isin(\pi) \; ; \; z_6 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

3. Mettre sous forme trigonométrique les nombres suivants :

$$z_7 = 5 \quad ; \quad z_8 = -5i \quad ; \quad z_9 = 1 - \sqrt{3}i$$

EXERCICE 7 :

DONNER L'ECRITURE ALGEBRIQUE DES NOMBRES SUIVANTS :

$$z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = e^{i\pi} \quad ; \quad z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad z_4 = 8e^{-i\frac{7\pi}{6}} \quad ; \quad z_5 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

EXERCICE 8:

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des propositions suivantes. Les réponses seront justifiées.

(A) Le module de $z_1 = -2e^{-5i}$ est -2.

(B) L'argument principal de $z_2 = -\sqrt{3} - i$ est $\frac{7\pi}{6}$.

(C) Quel que soit le réel θ le module de $e^{i\theta}$ est 1.

(D) Un argument de $\sin(\theta) + icos(\theta)$ est $\theta + \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 9 :

On considère les nombres complexes Z_1 et Z_2: $Z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{1+i}$ et $Z_2 = \frac{4i}{1+i\sqrt{3}}$.

1. Écrire les nombres Z_1 et Z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Calculer sous forme algébrique le produit $Z_1 \times Z_2$ et donner sa forme trigonométrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 10:

Soit $z_1 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$

On pose :

$$z_3 = \overline{z_2} \qquad z_4 = z_1 z_2 \qquad z_5 = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$$

$$z_6 = \frac{1}{z_2} \qquad z_7 = \frac{1}{\overline{z_2}} \qquad z_8 = \frac{z_1}{z_2} \qquad z_9 = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad z_{10} = z_1^4$$

Pour chacun des nombres complexes de $(z_i)_{1\leq i\leq 10}$, déterminer :

1. l'écriture algébrique.
2. le module.
3. l'argument principal.
4. l'écriture trigonométrique
5. l'écriture exponentielle.

Exercice11 :

Résoudre l'équation :

$$(3 + 2i)z = 1 + i + 3iz$$

Exercice 12 :

Soit ω un réel positif. Calculer le module et l'argument de :

$$z_1 = \frac{2}{1 + 3i\omega}$$

$$z_2 = \frac{1}{(1 + 0{,}5i\omega)^2}$$

Exercice 13 : *Application au circuit RLC série*

Soit : $z_R = R, \quad Z_L = iL\omega \quad et \quad Z_C = \frac{1}{iC\omega}$

On note : $Z_{eq} = Z_R + Z_L + Z_C$ où R, L, C et ω sont des réels strictement positifs.

1. Mettre Z_{eq} sous forme algébrique.

2. Donner l'expression de la partie réelle de Z_{eq}.

3. Calculer le module de Z_{eq}.

4. Donner l'expression de l'argument principal de Z_{eq}.

Exercice 14 : *Application au circuit RL parallèle*

On reprend les mêmes notations que l'exercice précédent.

On pose :

$$C_{eq} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L}$$

Déterminer Le module et l'argument principal de C_{eq}

Exercice 15 : *Application à l'électronique- fonction de transfert*

Soit

$$T = \frac{1}{1 + iRC\omega}$$

1. Déterminer le module de T.
2. Déterminer l'argument de T.

EXERCICE 16:

On définit le nombre complexe $T(\omega)$ par :

$$T(\omega) = \frac{1}{(1 + i\omega)(3 + i\omega)} \text{ où } \omega \text{ désigne un réel strictement positif.}$$

On pose : $z_1 = 3 + i\omega$, $z_2 = 1 + i\omega$ et $Z = z_1 z_2$.

1. Déterminer l'argument principal des nombres complexes z_1 ; z_2, Z et $T(\omega)$.
2. Déterminer le module des nombres complexes z_1 ; z_2, Z et $T(\omega)$.
3. Justifier que $Arg\left(T(\sqrt{3})\right) = -\frac{\pi}{2}$. Calculer $\left|T(\sqrt{3})\right|$.
4. En déduire l'écriture algébrique de $T(\sqrt{3})$.