

RMLQA – EXERCICES DU 18/01/2019

« COMBINATOIRE / PERMUTATIONS / ARRANGEMENTS / SOMMES »

LES ENONCES

Exercice n°1 :

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Exercice n°2 :

Deux équipes de hockey de 12 et 15 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match : chaque joueur d'une équipe serre la main de chaque joueur de l'autre équipe. Combien de poignées de main ont été échangées ?

Exercice n°3 :

Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*

Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers

Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage

Exercice n°4 :

En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères.

Un bit (*binary digit* : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

Exercice n°5 :

Un groupe d'élèves de terminale constitue le bureau de l'association " Bal des Terms : le succès ". Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien y a-t-il de bureaux possibles ? (il y a 24 élèves dans la classe)

Exercice n°6 :

Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1) Calculer le nombre d'éléments de A.

2) Dénombrer les éléments de A :

a) composés de quatre chiffres distincts

b) composés d'au moins deux chiffres identiques

c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

Exercice n°7 :

Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1) Combien de codes différents peut-on former ?

2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?

3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?

4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Exercice n°8 :

- 1) Dénombrer les anagrammes du mot PATRICE
- 2) Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot PATRICE :
 - a) commençant et finissant par une consonne ;
 - b) commençant et finissant par une voyelle ;
 - c) commençant par une consonne et finissant par une voyelle
 - d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne

Exercice n°9 :

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

Exercice n°10 :

Au loto, il y a 49 numéros. Une grille de loto est composée de 6 de ces numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?

Exercice n°11 :

Christian et Claude font partie d'un club de 18 personnes. On doit former un groupe constitué de cinq d'entre elles pour représenter le club à un spectacle.

- 1) Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?
- 2) Dans combien de ces groupes peut figurer Christian ?
- 3) Christian et Claude ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de telle façon que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble ?

Exercice n°12 :

Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

- 1) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
- 2) Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?
- 3) Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

Exercice n°13 :

On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une "main"

- 1) Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
- 2) Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :
 - a) un carré
 - b) deux paires distinctes
 - c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeurs. Exemple : 3 rois et 2 as)
 - d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré
 - e) une quinte (5 cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre croissant)

Exercice n°14 :

Un portemanteau comporte 5 patères alignées. Combien a-t-on de dispositions distinctes (sans mettre deux manteaux l'un sur l'autre) :

- a) pour 3 manteaux sur ces 5 patères ?
- b) pour 5 manteaux ?
- c) pour 6 manteaux ?

Exercice n°15 :

En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^n k C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

Exercice n°16 :

En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

- $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
- $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice n°17 :

On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice n°18 :

On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

- Combien y a-t-il de mains différentes ?
- Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
- Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
- Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

Exercice n°19 :

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice n°20 :

- Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$.
- Montrer que $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$ et trouver la valeur commune des deux sommes.
- Calculer les sommes $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$ et $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Montrer que $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ (utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$).
- Calculer les sommes $0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + \dots + n \cdot \binom{n}{n}$ et $\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1}$ (considérer dans chaque cas un certain polynôme astucieusement choisi).
- Montrer que $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} \dots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ où $0 \leq p \leq n$. Interprétation dans le triangle de PASCAL ?

Exercice n°21 :

Quel est le coefficient de $a^4 b^2 c^3$ dans le développement de $(a - b + 2c)^9$.

Exercice n°22 :

Résoudre dans \mathbb{N}^* l'équation $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$.