Université de Tours Année 2016-2017
Licence L1 de Mathématiques, Informatique, Physique, Chimie, Sciences de la vie - S1

CHAPITRE 2

NOMBRES COMPLEXES ET ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES (12 h)

1 Nombres complexes

1.1 Introduction

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$. Cet ensemble est construit en "ajoutant" aux nombres réels un nombre "imaginaire" dont le carré est égal à -1, et en prolongeant les opérations d'addition et de multiplication. La motivation initiale de cette construction était la résolution des équations algébriques, en particulier des équations du troisième degré. Depuis le 19ème siècle, les nombres complexes sont devenus un outil fondamental dans toutes les branches des mathématiques (géométrie, analyse et algèbre), mais aussi en physique et en électronique.

On retiendra tout d'abord que :
• l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$;
• l'ensemble $\mathbb{C}$ contient un élément, noté i par les mathématiciens, tel que $i^2 = -1$;
• il existe dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication qui prolongent les opérations usuelles dans $\mathbb{R}$. Les règles de calcul avec ces deux opérations sont les mêmes que pour les nombres réels, ce qu'on résume en disant que $\mathbb{C}$ est un corps.
• mais attention ! La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de prolongement naturel sur $\mathbb{C}$; une inégalité entre nombres complexes n'a a priori aucun sens.
(Outre une connaissance de l'ensemble des nombres réels, ce chapitre présuppose que la mesure des angles plans en radians et les fonctions sinus, cosinus sont connues.)

1.2 Écriture algébrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme : $z = a + ib$, où a, b sont deux nombres réels et i vérifie $i^2 = -1$. C'est **la forme algébrique** du nombre complexe z. Cette écriture établit une bijection entre l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ et le *plan réel* $\mathbb{R}^2$.

Règles d'addition et de multiplication : Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. On a $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ et $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

Définitions et notations : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
• Le nombre réel a est la **partie réelle** de z ; on le note $\mathrm{Re}(z)$.
Le nombre réel b est la **partie imaginaire** de z ; on le note $\mathrm{Im}(z)$.
• On appelle **conjugué** de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.
• On appelle **module** de z le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Les applications "partie réelle" et "partie imaginaire" sont *linéaires* :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z+z') &= \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z+z') &= \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z') \end{cases}, \quad \text{et pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda \cdot z) &= \lambda \cdot \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(\lambda \cdot z) &= \lambda \cdot \mathrm{Im}(z) \end{cases}.$$

Quelques propriétés de la conjugaison. Soient z et z' deux nombres complexes.

(1) $\left\{ \begin{array}{lcl} z & = & \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) \\ \overline{z} & = & \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z) \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Re}(z) & = & (z+\overline{z})/2 \\ \mathrm{Im}(z) & = & (z-\overline{z})/2i \end{array} \right.$.

(2) $\left\{ \begin{array}{lll} \overline{z} = z & \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 & \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R} \\ \overline{z} = -z & \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 & \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R} \quad \text{(On dit alors que } z \text{ est } \textit{imaginaire pur)} \end{array} \right.$.

(3) $\overline{\overline{z}} = z$. (4) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. (5) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$. (6) Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Quelques propriétés du module. Soient z et z' deux nombres complexes.

(1) $|z| = 0 \iff z = 0$.

(2) $z\overline{z} = |z|^2$. En particulier, si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

(3) $|\overline{z}| = |z|$. (4) $|zz'| = |z||z'|$. (5) Si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

(6) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (**inégalité triangulaire**).

1.3 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe

Rappel. Pour toute paire (a, b) de nombres réels tels que $a^2 + b^2 = 1$, il existe un nombre réel θ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. Ce nombre θ est déterminé de façon unique à l'addition d'un multiple de 2π près.

L'exponentielle complexe. Pour tout nombre réel θ, on note

$$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Propriétés. Soient θ et θ' deux nombres réels.

(1) $|e^{i\theta}| = 1$ et $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$. (2) $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$; c'est-à-dire :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ (**formule de Moivre**).

(4) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (**formules d'Euler**).

(5) $e^{i\theta} = 1 \iff (\exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = 2k\pi)$ et $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff (\exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta' = \theta + 2k\pi)$

Forme trigonométrique.

$\boxed{\text{Tout nombre complexe } z \text{ s'écrit sous la forme } z = \rho e^{i\theta}, \text{ où } \rho = |z| \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.}$

Si z est non nul, alors tout nombre θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$, est appelé **un argument** de z.
Si θ est un argument de $z(\neq 0)$, alors l'ensemble des arguments de z est $\{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
On note : $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$.
(L'argument du nombre $z = 0$ n'est pas déterminé.)

Les propriétés (1) et (5) de l'exponentielle complexe se traduisent de la façon suivante pour deux nombres complexes z et z' non nuls :
$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$; en particulier $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.
$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) = \arg\left(\frac{1}{z}\right)\ [2\pi]$; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.
$z = z' \iff (|z| = |z'| \text{ et } \arg(z) = \arg(z')[2\pi])$.

Exemples

Le nombre complexe i a pour module 1 et argument $\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. On a $i = e^{i\pi/2}$.

Une des formules les plus fascinantes des mathématiques est : $1 + e^{i\pi} = 0$.

-2 est le nombre complexe de module 2 et d'argument π $[2\pi]$.

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$ (etc... voir exercices).

Cas particuliers.

1. Soit z un nombre complexe **non nul**.
- z est réel positif si et seulement si $\arg(z) = 0$ $[2\pi]$.
- z est réel négatif si et seulement si $\arg(z) = \pi$ $[2\pi]$.

2. Soit z un nombre complexe.
- z est réel si et seulement si $z = 0$ ou $\arg(z) = 0$ $[\pi]$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $z = 0$ ou $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$.

1.4 Interprétation géométrique

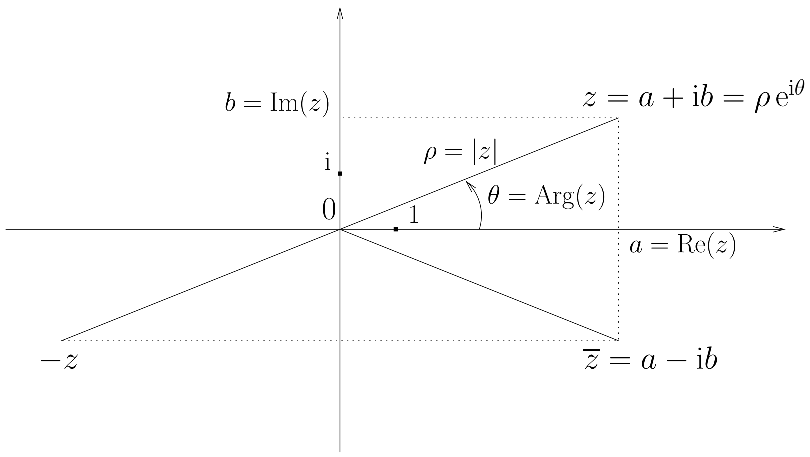

FIGURE 1 – *Représentation géométrique d'un nombre complexe $z = a + ib$ par le point M du plan d'abscisse a et d'ordonnée b. On appelle z* l'affixe *du point M.*

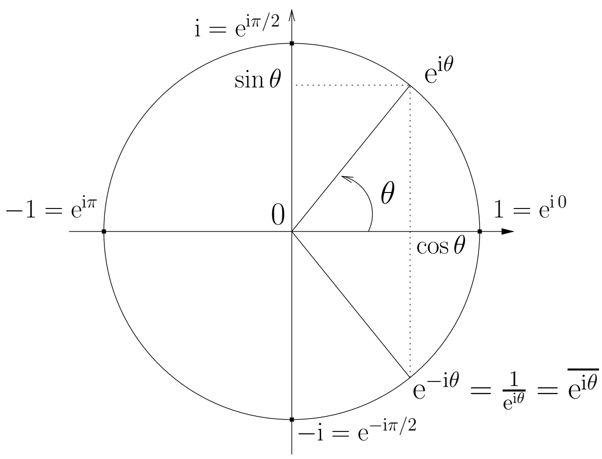

FIGURE 2 – *Cercle trigonométrique : centre* 0, *rayon* 1 *et équation* $|z| = 1$

2 Équations algébriques

Nous verrons apparaître dans cette section un petit “miracle mathématique” : en ajoutant à l'ensemble des nombres réels une solution de l'équation du second degré $x^2 + 1 = 0$, nous avons construit un ensemble dans lequel *toutes* les équations algébriques ont une solution !

2.1 Équations du second degré à coefficients complexes

Définition. Soit $u \in \mathbb{C}$. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est **une racine carrée** de u lorsque $z^2 = u$.

Proposition 2.1 *Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.*
Si $u = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$, alors les racines carrées de u sont $\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$ et $-\sqrt{\rho}e^{i\theta/2} = \sqrt{\rho}e^{i(\pi+\theta/2)}$.

Proposition 2.2 *On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres complexes, avec $a \neq 0$.*
- *si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ où δ est une racine carré de Δ.*
- *si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation a une seule solution, dite* **double** *: $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$.*

Les solutions, distinctes ou non, z_1, z_2 vérifient : $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

(En considérant le cas particulier où les nombres a, b et c sont réels, retrouver à partir de l'énoncé précédent les résultats connus sur les équations du second degré à coefficients réels.)

2.2 Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe non nul

Définition. Soient $u \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une **racine $n^{\text{ème}}$** de u est un nombre complexe z tel que $z^n = u$.

Proposition 2.3 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout nombre complexe non nul admet exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ distinctes. Si $u = re^{i\alpha}$ est un nombre complexe non nul écrit sous forme trigonométrique, alors ses n racines $n^{\text{èmes}}$ sont les nombres*

$$r^{1/n} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Autrement dit, les solutions $z = \rho e^{i\theta}$ de l'équation $z^n = re^{i\alpha}$ (avec $r > 0$) sont données par

$$\rho = r^{1/n} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\alpha}{n} \left[\frac{2\pi}{n}\right].$$

Cas particulier : Les racines $n^{\text{èmes}}$ du nombre 1 sont appelées les **racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité**. Ce sont les n nombres complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

2.3 Équations algébriques dans $\mathbb{C}$

Définition. On appelle **fonction polynôme complexe** (on dira aussi polynôme) toute fonction P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \, ,$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont des nombres complexes.
Si $a_n \neq 0$, alors le nombre entier n est appelé **le degré** du polynôme P.
Les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont appelés **les coefficients** du polynôme P.

Remarques.

- Les polynômes peuvent s'additionner, se multiplier ou se composer pour donner d'autres polynômes.
- Les polynômes de degré ≥ 1 sont les polynômes non constants.

Définition. On appelle **racine** du polynôme P tout nombre complexe z_1 tel que $P(z_1) = 0$.

Théorème fondamental de l'algèbre ou "de d'Alembert".
Tout polynôme non constant possède au moins une racine complexe.

Division euclidienne. Soient A et B deux polynômes non constants. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que

$$A = BQ + R \qquad \text{et} \qquad \text{degré}(R) < \text{degré}(B).$$

Lorsque le reste R de la division euclidienne de A par B est nul, on dit que le polynôme B **divise** le polynôme A.

Proposition 2.4 *Soient P un polynôme et $z_1 \in \mathbb{C}$.*
Le nombre z_1 est racine de P si et seulement si le polynôme $z \mapsto z - z_1$ divise P.

Théorème fondamental de l'algèbre (version 2).
Tout polynôme (complexe) non constant s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1.

Ainsi, on peut écrire $P(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$ où les z_i sont les racines du polynôme P.
En rassemblant les racines qui se répètent, on peut écrire

$$P(z) = a_n(z - w_1)^{k_1}(z - w_2)^{k_2} \cdots (z - w_\ell)^{k_\ell} \, ,$$

où $(w_1, w_2, \ldots, w_\ell)$ est la liste des racines (deux à deux distinctes) de P et où $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$ sont des nombres entiers > 0 tels que $k_1 + k_2 + \ldots + k_\ell = n$.
Le nombre k_i est appelé **l'ordre** (ou **la multiplicité**) de la racine w_i du polynôme P.

Théorème fondamental de l'algèbre (version 3).
Tout polynôme (complexe) de degré $n \geq 1$ possède exactement n racines, à condition que chacune d'entre elles soit comptée autant de fois que sa multiplicité.

Polynôme dérivé.
Le polynôme dérivé du polynôme $P(z) = a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ est le polynôme

$$P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) z^{n-2} + \ldots + 2 a_2 z + a_1 = \sum_{j=1}^{n} j a_j z^{j-1}$$

et l'opération de dérivation pouvant être répétée, les polynômes dérivés successifs sont notés :

$$P(z) = P^{(0)}(z), \quad P'(z) = P^{(1)}(z), \quad (P')'(z) = P''(z) = P^{(2)}(z), \quad (P'')'(z) = P^{(3)}(z) \ \ldots$$

Remarques.

- Soient P un polynôme (non nul) de degré n, et $k \in \mathbb{N}$. Le $k^{\text{ième}}$ polynôme dérivé $P^{(k)}$ est nul si et seulement si $k > n$.
- On a la célèbre et fort utile **formule de Taylor** : $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(0)\, z^k$.

Proposition 2.5 *Soient P un polynôme non nul, w un nombre complexe, et k un nombre entier > 0. Il y a équivalence entre les trois affirmations suivantes :*
— *Le nombre w est une racine de multiplicité k du polynôme P.*
— *Il existe un polynôme Q tel que $Q(w) \neq 0$ et $P(z) = (z-w)^k Q(z)$.*
— *$P^{(j)}(w) = 0$ pour $0 \leq j \leq k-1$, et $P^{(k)}(w) \neq 0$.*

Relations entre coefficients et racines.
Nous avons déjà remarqué que pour un polynôme du second degré $az^2 + bz + c$, la somme des racines est $-b/a$ et le produit des racines est c/a. Examinons comment ces formules s'étendent aux polynômes de degré 3.
Soient $a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ un polynôme de degré 3, et z_1, z_2, z_3 ses racines (chacune apparaissant autant de fois que l'indique sa multiplicité) ; on a

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = a_3 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

d'où l'on déduit que

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \frac{a_1}{a_3}, \quad z_1 z_2 z_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

(On laisse le lecteur écrire les formules correspondantes pour le degré 4, puis pour un degré arbitraire.)

2.4 Équations algébriques dans $\mathbb{R}$

Un polynôme est dit **réel** si ses coefficients sont des nombres réels.
Tout polynôme réel définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, du type

$$x \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Un polynôme réel non constant n'a pas nécessairement de racine réelle. C'est en particulier le cas des polynômes du second degré $ax^2 + bx + c$ dont le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est < 0.

On sait qu'un polynôme réel P de degré $n \geq 1$ a exactement n racines complexes (comptées avec leur multiplicité). Parmi ces racines un certain nombre peuvent être réelles, notons les

$x_1, x_2, \ldots, x_\ell$. Quant aux racines complexes non réelles, elles vont par paires de racines conjugées ; on peut vérifier en effet que si $P(z) = 0$ alors $P(\overline{z}) = 0$; notons $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, \ldots, z_m, \overline{z_m}$ ces racines non réelles. D'après la version 2 du théorème fondamental de l'algèbre, on a :

$$P(x) = a_n \prod_{j=1}^{\ell}(x - x_j) \prod_{k=1}^{m}(x - z_k)(x - \overline{z_k}),$$

c'est-à-dire

$$P(x) = a_n \prod_{j=1}^{\ell}(x - x_j) \prod_{k=1}^{m}\left(x^2 - 2\mathrm{Re}(z_k)x + |z_k|^2\right).$$

Définition. On appelle **polynôme irréductible** tout polynôme non constant qui ne peut pas être écrit comme un produit de deux polynômes non constants.

L'étude précédente démontre que les polynômes irréductibles réels sont les polynômes réels de degré 1 et les polynômes réels de degré 2 à discriminant < 0. Enfin, nous avons obtenu :
Théorème fondamental de l'algèbre (version 4).
Tout polynôme réel non constant peut s'écrire comme un produit de polynômes irréductibles.