PARCOURS RMLQA — ANNÉE 2018-2019
UNIVERSITÉ DE TOURS

Intégration

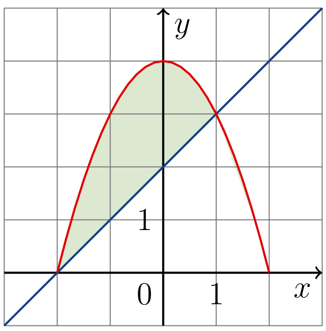
Exercice 1

Dire pour chaque proposition si elle est vrai ou fausse.

1. Si, pour tout réel x, $f(x) = e^{-x}$, alors, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}$.
2. Si, pour tout réel x, $f'(x) = 2$, alors pour tout réel x, $f(x) = 2x + 3$.
3. Si, pour tout réel x, $f(x) = \ln(x^2 + 3)$, alors, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$.
4. Si, pour tout réel x, $f'(x) = 2x$, alors, pour tout réel x, $f(x) = x^2$.
5. Si, pour tout réel $x > -3$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^5}$, alors, pour tout réel $x > -3$, $f'(x) = \dfrac{-5}{(x+3)^6}$.

Exercice 2

1. Choisir la bonne réponse parmi celles proposées.



La zone colorée ci-dessus est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que :

$$(a)\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ y \leq 4 - x^2 \\ y \leq x + 2 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ y \geq 4 - x^2 \\ y \leq x + 2 \end{cases}$$
$$(c)\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ y \leq 4 - x^2 \\ y \geq x + 2 \end{cases} \quad (d)\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ y \geq 4 - x^2 \\ y \geq x + 2 \end{cases}$$

2. Colorer dans un repère orthonormé l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que :

$$(a)\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y \geq x^2 \\ y \leq 1 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} x \leq 4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 2 \\ y \leq x \end{cases}$$

3. Exprimer chaque domaine coloré de la question 2 sous forme d'une intégrale.

Exercice 3

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $F(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2$; $f(x) = 8x^3 - 15x^2 + 6x$; $I = \mathbb{R}$.
2. $F(x) = 2(3x - 1)^3$; $f(x) = 18(3x - 1)^2$; $I = \mathbb{R}$.
3. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$; $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; $I = \mathbb{R}$.
4. $F(x) = \frac{x}{2e^x}$; $f(x) = \dfrac{1 - x}{2e^x}$; $I = \mathbb{R}$.
5. $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$; $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$; $I = \mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Rappeler les primitives des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

(a) $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \neq -1$; (b) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; (c) $x \mapsto \sin(x)$;
(d) $x \mapsto \cos(x)$; (e) $x \mapsto e^x$; (f) $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$;
(g) $x \mapsto 1 + (\tan(x))^2$; (h) $x \mapsto \dfrac{1}{(\cos(x))^2}$.

2. Déterminer les primitives suivantes et vérifier les réponses :

$$\text{(a)} \int x^3 + \frac{1}{x^3} + 1;\, \mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x;$$
$$\text{(c)} \int 4\sqrt[3]{x}\, \mathrm{d}x; \qquad \text{(d)} \int e^{3x}\, \mathrm{d}x.$$

Exercice 5

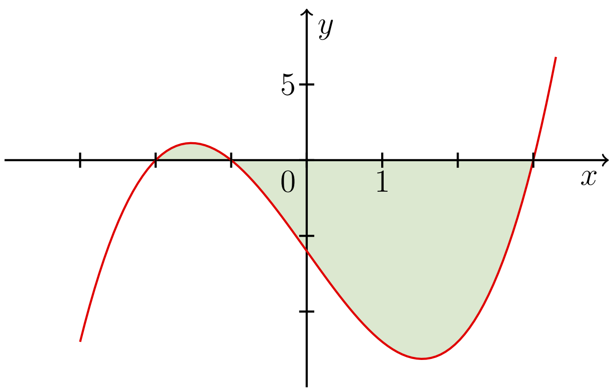
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une primitive F de la fonction donnée sur l'intervalle I donné.

1. $f(x) = 5x^6 - 2x^3 + 3x^2 + 7$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{3}{x^7} + \dfrac{1}{x^2}$, $I =]0, +\infty[$.
3. $f(x) = 3x^2(x^3 + 2)^4$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \dfrac{-5}{(1-5x)^2}$, $I = \left]-\infty, \dfrac{1}{5}\right[$.
5. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $I = \mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 7x - 6$. On a tracé ci-dessous sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Montrer que $f(x) = (x-3)(x+1)(x+2)$.
2. Calculer l'aire de la partie coloriée.



Exercice 7

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\, \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(x)\, \mathrm{d}x$.

1. Calculer $I + J$ et $I - J$.
2. En déduire I et J.

Exercice 8

1. Donner sans calcul le signe de $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a : $x \leq \sqrt{x^2+1} \leq x + \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9 Vrai ou Faux ?

1. Si F est positive sur un intervalle I, alors $f = F'$ est croissante sur I.
2. Si F est croissante sur un intervalle I, alors $f = F'$ est positive sur I.
3. Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors $F' = f$.
4. Si $F' = f$ sur un intervalle I, alors F est une primitive de f sur I.

Exercice 10

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a, b]$.

1. Quelle est la dérivée de la fonction uv sur $[a, b]$?
2. Déterminer alors une expression de :
$$\int_a^b (u(x)v'(x)) + u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x.$$
3. En déduire que :
$$\int_a^b (u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b (u'(x)v(x))\,\mathrm{d}x.$$
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.
5. Déterminer, à l'aide de la formule trouvée à la question 3 (intégration par partie), une primitive de la fonction ln sur $]0, +\infty[$.