Probabilités sur un espace d'état fini

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut a priori prédire à coup sûr le résultat. On s'intéresse néanmoins à l'ensemble des résultats (ou états) possible de l'expérience, que l'on note Ω.

Cet ensemble peut être fini, infini mais dénombrable (typiquement $\Omega = \mathbb{N}$), ou non dénombrable ($\Omega = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ etc.). On va se concentrer dans un premier temps sur le cas d'un ensemble d'états fini, mais les notions et propriétés s'étendent aux autres cas.

(a) Espace des états et probabilité — On se donne ici un ensemble fini

$$\Omega := \{e_1, e_2, \cdots e_N\},$$

où chaque $e_i \in \Omega$ représente un état possible d'un système aléatoire.

On appelle événement tout ensemble $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$, autrement dit un événement est une combinaison d'états possibles. L'ensemble Ω lui-même est un événement particulier, appelé événement certain puisqu'il recoupe toutes les possibilités de résultats.

Une probabilité sur Ω est une application qui permet de mesurer avec quel degré un événement peut se réaliser : plus la probabilité est proche de zéro, moins l'événement est probable alors qu'il devient très probable lorsque la probabilité s'approche de 1.

Une probabilité sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ telle que :
(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(ii) Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ disjoints, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(b) Propriétés — A partir de la définition, on peut montrer qu'une probabilité vérifie les propriétés suivantes :

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \subset \mathbb{P}(B)$

(c) Cas d'une probabilité uniforme — Un exemple important est celui où chaque état de Ω est suceptible d'apparaitre avec la même probabilité. La loi de probabilité est ainsi donnée par :

$$\mathbb{P}(\{e_i\}) = \frac{1}{N} \quad \text{pour tout } i = 1..N\,.$$

Dans ce cas, si $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est un événement quelconque, on obtient aisément que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{N} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}\,.$$

Exemple typique : On considère ici un tirage d'un à 6 face non pipé (ce qui signifie que chaque face a une probabilité d'apparition identique à celle des autres). Dans ce cas, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et on choisit pour $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme, qui donne une valeur de $1/6$ pour chaque face.

La probabilité d'obtenir un chiffre pair est donc :

$$\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

(c) Indépendance et probabilité conditionnelle — intuitivement, deux événements sont indépendants si la connaissance de la probabilité d'apparition de l'un n'apporte aucune information supplémentaire sur la probabilité d'apparition de l'autre. Mathématiquement la définition exacte est la suivante :

On dit que $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

La notion de probabilité conditionnelle touche aux même questions : en sachant qu'un événement B se produit, que peut-on savoir de plus sur A. On définit donc une nouvelle loi de probabilité "sachant B" qui est donnée par :

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\,.$$

Evidemment, cela n'a un sens que si B est un événement de probabilité non nulle.

On voit aisément que si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ ce qui signifie bien que la connaissance de B n'apporte rien sur A du point de vue de la probabilité d'apparition.

Exemples : On lance simultanément deux dés non pipés, et on définit donc une probabilité uniforme d'apparition de tous les couples possibles. Il est assez naturel ici de considérer que tout événement concernant le premier dé est indépendant de tout événement concernant le second dé. Vérifier que c'est bien le cas.

Si on étudie une urne contenant 10 boules sans remise par contre, le premier tirage influe de façon non négligeable sur le second tirage. Donc on est dans une situation différente de la précédente.

(d) Notion de variable aléatoire — La notion de variable aléatoire est mathématiquement très simple à définir dans le cas fini ou dénombrable : il s'agit d'une application de Ω à valeur dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$). On se donne donc $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

La loi de la variable aléatoire X est une nouvelle probabilité qui mesure les différentes possibilités d'apparition des valeurs de X. Le cas qui nous intéresse ici concerne les variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs prises forme un ensemble fini (ou dénombrable). Le cas continu nécessite des définitions plus élaborées.

Par exemple, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on peut donc définir la loi de X notée $\mathbb{P}_X$ ainsi :

$$\mathbb{P}_X(\{k\}) := \mathbb{P}(\{x = k\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}) .$$

Ainsi, on définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ par l'intermédiaire de la v.a. X.

Exemple : On lance deux dés à 6 faces non pipés de façon indépendante, et on appelle S la somme des deux numéros qui sortent. Déterminer la loi de S.