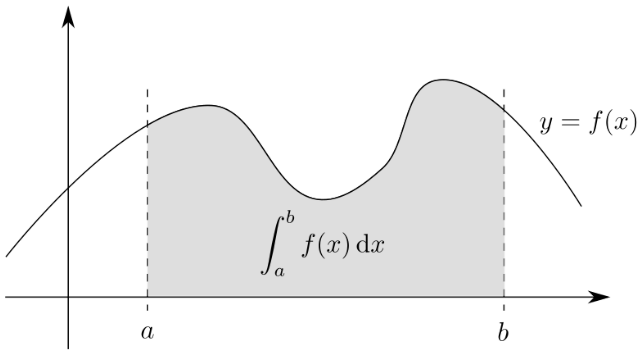
Intégrale et primitives

(a) Intégrale – D'une façon intuitive, l'intégrale d'une fonction entre deux bornes est l'aire de la portion sous la courbe entre ces deux bornes (cf. figure ci-dessous)



Il existe plusieurs définitions de l'intégrale mais qui sont toutes équivalentes pour le cas des fonctions f continues.

Dans le cas d'une fonction constante, on se ramène à calculer l'aire d'un rectangle, donc $\int_a^b C\,dx = C(b-a)$. Cela permet notamment de découper l'intégrale en plusieurs morceaux, en approchant à chaque fois la fonction f par une fonction constate sur un petit intervalle. Si la fonction f change de signe, on compte en négatif la portion d'aire en dessous de l'axe des x.

(b) Propriétés de l'intégrale — les quelques propriétés suivantes sont fondamentales :

Proposition — Soient f, deux fonctions continues sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
(i) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
(ii) $\int_a^b \int (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.
(iii) si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
(iv) si $a < c < b$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (règle de Chasles).

Par convention, si $b < a$, on pose $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

(c) Primitives – dans le cas général, on calcule une intégrale à l'aide d'une primitive. Une primitive est l'inverse d'une dérivée : si f est une fonction, une primitive de f est une fonction F telle que $F' = f$. On voit bien que si F est une primitive de f, toutes les primitives sont de la forme $G = F + c$ où c est une constante.

Théorème — Soit $a < b$ et f une fonction ayant une primitive F. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Evidemment, si on prend une autre primitive G, le résultat ne change pas puisque la constante s'annule quand on calcule $G(b) - G(a)$.

Exemple : dans le cas où $f = C$, alors $F(x) = Cx$ et l'intégrale entre a et b vaut bien $[Cx]_a^b = C(b - a)$.

(d) Recherche de primitives — la recherche d'une primitive n'est pas toujours aussi simple que le calcul de dérivée (qui est plus ou moins automatique). Mais on peut déjà partir de toutes les fonctions de références pour lesquelles on connait le résultat : une primitive de x est $x^2/2$, pour $1/x$ on a $\ln x$ et pour e^x, elle-même etc. ensuite, utiliser les résultats sur les sommes, produits etc... des dérivées, mais en les appliquant pour les primitives.

Attention cependant, la primitive de fg n'est pas FG, ni $Fg + fG$ etc...

(e) Intégration par parties — En utilisant la formule $(uv)' = u'v + uv'$ on en déduit la formule suivante :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,.$$

Cette formule est très utile pour transformer des intégrales quand on ne voit pas de primitive a première vue.

Exemple : $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})\,dx$ ...

(f) Application au calcul de primitive — on peut utiliser les intégrales pour calculer des primitives : si f a pour primitive F, alors

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Ainsi, si on cherche la primitive qui s'annule en a, il suffit de calculer $\int_a^x f(t)\,dt$, à supposer qu'on soit capable de le faire évidemment.

Exemple : $\int_1^x \ln(t)\,dt = [t\ln t]_1^x = x\ln x$, on en déduit que la primitive de la fonction $\ln(x)$ qui s'annule en $x = 1$ est la fonction $F(x) = x\ln(x)$. Un petit calcul montre en effet que $F'(x) = f(x) = \ln x$.