Parcours RMLQA — Année 2018-2019
Université de Tours

Eléments de dénombrement

(a) Factorielle – Pour tout entier $n \geq 1$ on note $n!$ la *factorielle* de n, c'est l'entier obtenu en multipliant entre eux tous les entiers $k \leq n$:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n\,.$$

En particulier, $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ etc. La factorielle vérifie donc la relation de récurrence suivante : $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

Attention : par convention, on pose $0! = 1$, ce qui permet d'assurer la cohérence et la simplicité d'écriture de plusieurs formules sans avoir besoin de faire des cas particuliers.

(b) Permutations – On se donne un ensemble E contenant n éléments, pour simplifier $E = \{1, 2, 3 \ldots n\}$. Une permutation de E est une application $\sigma : E \to E$ qui est bijective. Ainsi, pour chaque nombre $i \in E$, on associe un unique $\sigma(i)$ dans E, et qui n'est l'image que de i par σ.

Pour dénombrer (compter) le nombre de permutations, on procède ainsi : Pour $\sigma(1)$, on a n possibilités. Une fois $\sigma(1)$ défini, on n'a plus que $(n-1)$ possiblités pour $\sigma(2)$ car nécessairement $\sigma(2) \neq \sigma(1)$ sinon σ ne serait pas injective.

Ensuite, on a donc $(n-2)$ possiblilités pour choisir $\sigma(2)$ et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'une seule possibilité restante pour choisir $\sigma(n)$.

Au total on a donc $n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1 = n!$ possibilités pour définir σ.

Conclusion : *Si E est un ensemble à n éléments, le nombre de permutations de E est $n!$.*

Exemple : pour une classe de 30 étudiants à répartir sur 30 chaises, il y a $30!$ possibilités de configuration de la classe.

(c) Combinaisons – On se donne un ensemble E à n éléments et un nombre entier k compris entre 0 et n. On appelle k-combinaison de E tout sous-ensemble de E de cardinal k.

Exemple : si $E = \{a, b, c\}$, alors les 2-combinaisons de E sont les suivantes : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

Théorème – le nombre total de k-combinaisons d'un ensemble à n éléments est donné par le coefficient "k parmi n", donné par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Preuve – On a n choix pour déterminer le premier élément, puis $(n-1)$ pour le second etc... jusqu'au k-ième pour lequel on a $(n-k+1)$ choix. On pourrait donc penser que le bon nombre de combinaisons est $(n-k+1)(n-k+2)\dots n = n!/(n-k)!$ mais il faut tenir compte du fait que par cette méthode, on compte différement les permutations des k éléments. Il faut donc diviser le nombre obtenu par le nombre de permutations, soit $k!$. D'où le résultat

N.B. – on parle d'*arrangements* lorsque le choix de l'ordre des k éléments importe. Dans ce cas, le nombre d'arrangements est plus simplement $n!/(n-k)!$, puisqu'on ne divise pas par le nombre de permutations. Les coefficients $\binom{n}{k}$ s'appellent aussi coefficient binomiaux car ils interviennent dans la formule du binôme de Newton – *cf.* ci-dessous.

Exemple : de combien de façon peut-on choisir 4 cartes parmi 32 ? réponse :

$$\binom{32}{4} = \frac{32!}{4!\,28!} = 35960\,.$$

(d) Formule du binôme de Newton – Cette formule est fondamentale, et peut être démontrée de plusieurs façons : par récurrence (en utilisant une propriété des coefficients binomiaux, ou comme ici, de façon directe).

Théorème – soit $n \geq 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,.$$

Preuve – Lorsqu'on développe $(a+b)^n$ on voit facilement qu'on va obtenir des termes de la forme $c_1c_2c_3\dots c_n$ où pour chaque i, $c_i = a$ ou b. Si on suppose qu'on a k fois le nombre a et donc $n-k$ fois le nombre b, le résultat est toujours le même : a^kb^{n-k}.

Reste donc à compter le nombre de possibilités de choisir k emplacements parmi n pour y mettre les "a". Ce qui conduit au coefficient $\binom{n}{k}$, d'où la formule.

Exemple classique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, résultat que l'on peut comprendre en se souvenant que le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ vaut 2^n si E est un ensemble à n éléments.