Utilisation du signe somme, $\sum$

(a) Principe – Le symbole Σ est couramment employé pour représenter de façon condensée une somme (addition) de plusieurs termes. Il s'agit de la lettre grecque sigma, version majuscule de la lettre σ.

Considérons par exemple la somme suivante : $S = 2+3+5+7+11+17+\cdots+29$ des dix premiers nombres premiers. En notant p_i le i-ème nombre premier (par exemple $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_{10} = 29$) on écrira de façon condensée $S = \sum p_i$ pour dire qu'on fait la somme des nombres p_i.

Néanmoins, il faut préciser quelles sont les valeurs prises par l'indice i, en particulier savoir quand démarre et quand s'arrête la somme. La convention est de noter les bornes de la variable en dessous et au dessus du symbole $\sum$. Par exemple, ici on écrira

$$S = \sum_{i=1}^{10} p_i \,.$$

(b) Définition – De façon générale, si (u_n) est une suite de nombres, on dénote par

$$\sum_{i=p}^{q} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_q$$

la somme des (u_i) quand l'indice i prend toutes les valeurs entières comprises entre p et q (incluses).

La variable de comptage est représentée par une lettre quelconque (souvent : i, j, k, n, m, p ...) qui prend un certain nombre de valeurs, toujours *entières*.

Par exemple, en utilisant la suite $u_k = k^2$, on a

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

et de même,

$$\sum_{n=0}^{3} e^{2n+1} = e^1 + e^3 + e^5 + e^7 \,.$$

Attention – *comme on le voit, si la somme démarre à zéro et se termine à* N*, on a au total* $(N+1)$ *termes.*

(c) Variable muette – la variable de comptage que l'on vient d'utiliser dans le calcul des sommes est une variable dite *muette*. Cela signifie qu'elle n'a pas de valeur spécifique en dehors du calcul de la somme, elle est juste utilisée comme intermédiaire pour condenser l'écriture.

En particulier, on peut décider de changer le symbole sans que cela modifie la somme :

$$\sum_{k=1}^{3} 2k = \sum_{n=1}^{3} 2n = 2+4+6\,.$$

N.B.– On retrouvera ces notions dans le cas de sommes plus élaborées, les intégrales.

(e) Propriétés – On retrouve bien évidemment les mêmes propriétés que pour l'addition (commutativité, associativité, distributivité...). En particulier :

$$\sum_{i=1}^{N}(u_i+v_i) = \sum_{i=1}^{N} u_i + \sum_{i=1}^{N} v_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda u_i = \lambda \sum_{i=1}^{N} u_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} 1 = N$$

(d) Changement de variable – Dans certains cas, il est utile de changer la variable de comptage pour avoir une "meilleure" écriture de la somme, ou même pour être en mesure de la calculer.

On considère par exemple la somme $S = 11+12+13+14+\dots 20$. Une première façon, assez naturelle d'écrire la somme consiste à voir qu'on fait la somme des entiers compris entre 11 et 20, d'où

$$S = \sum_{n=11}^{20} n\,.$$

Mais on peut aussi voir cette somme sous la forme

$$S = \sum_{i=1}^{9} (i + 10) \,,$$

puisqu'en effet, tout entier compris entre 11 et 20 s'écrit de façon unique comme $i+10$ où i est un entier compris entre 0 et 9. On voit que le lien entre les variables des deux écriture est le suivant : $n = i+10$. En utilisant ensuite les propriétés classiques des sommes, on obtient

$$S = \sum_{i=1}^{9} (i) + 10 \sum_{i=1}^{9} (1) = \frac{9 \times 10}{2} + 10 \times 9 = 135 \,.$$

Autre exemple très utilisé, en posant $i' = i - 1$ on voit que

$$\sum_{i=1}^{N} u_i = \sum_{i'=0}^{N-1} u_{i'+1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_N \,.$$

La variable i' étant muette, on peut même réécrire la seconde somme avec la variable i : le résultat de la somme n'est pas changé.

(e) Quelques sommes classiques – Parmi les sommes classiques à connaître, on retrouve évidemment les sommes des suites arithmétiques et géométriques :

$$\sum_{k=1}^{n} kr = r \frac{n(n+1)}{2} \,, \quad \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \,.$$

(f) Sommes télescopiques – Il s'agit d'une "fausse somme" dans laquelle en fin de compte tous les termes se compensent sauf le premier et le dernier : si une suite u_n est donnée par $u_n = v_{n+1} - v_n$, alors

$$\sum_{i=p}^{q} u_i = (v_{p+1} - v_p) + (v_{p+2} - v_{p+1}) + \cdots + (v_{q+1} - v_q) = v_{q+1} - v_p$$

Exemple typique : si $u_n = \ln(1 + 1/n)$, alors $v_n = \ln(n)$ et on voit que $\sum_{k=1}^{N} \ln(1 + 1/k) = \ln(N+1)$.