Suites numériques

(a) Notion de suite – D'un point de vue formel, on appelle *suite numérique* toute application $U : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Concrètement, cela signifie donc qu'une suite numérique est une succession de termes qui sont des nombres réels.

On note souvent $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite, ce qui signifie que si $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \in \mathbb{R}$ est le terme de rang n.

Exemple : $u_0 = 0, u_1 = 4, u_2 = -1/2, u_3 = \pi \ldots$; ou encore $V = (v_n)$ où v_n est la n-ième décimale de $\sqrt{2}$.

A priori les termes de la suite n'ont pas nécessairement de lien entre eux mais le but de l'étude des suites est en particulier de voir quels sont les propriétés globales de la suite.

Remarque : une suite n'est pas obligée de démarrer à l'indice $n = 0$. Par exemple, $u_n := 2 + \sqrt{n-4}$ n'est définie que pour $n \geq 4$.

Trois exemples typiques de suites.

$u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$
v_n définie par $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = f(v_n)$
$w_n :=$ la n-ème décimale de π.

Le premier cas est d'un certain point de vue le plus facile à étudier car la suite (u_n) est donnée de façon explicite. On peut par ailleurs étudier la fonction f et en déduire de nombreuses propriétés sur (u_n).

Le second cas est plus délicat, il s'agit d'une *suite récurrente*, où la relation de récurrence est donnée par une fonction f. Le calcul de v_n nécessite en théorie de calculer tous les termes un à un, mais si la fonction f vérifie certaines hypothèses, on peut en déduire de nombreuses propriétés de la suite sans la calculer explicitement.

Enfin, le dernier cas est un exemple difficile à étudier car d'une part la suite n'est pas explicite, d'autre part il n'existe pas de relation permettant de calculer un terme de la suite en fonction du précédent. Il n'y a donc pas de théorie ou méthode générale pour l'aborder et il faut voir au cas par cas.

Souvent, on n'a que des renseignements partiels sur les propriétés d'une telle suite.

(b) Définitions – Il est très commode d'utiliser les quantificateurs pour tout un tas de définitions :

(u_n) est bornée : $\exists M > 0,\ \forall n \geq 0,\ |u_n| \leq M$

(u_n) est croissante : $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \geq u_n$

(u_n) est périodique : $\exists T \in \mathbb{N}_*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+T} = u_n$

Par exemple, la suite $u_n = (-1)^n$ est bornée mais ni croissante ni décroissante. Autre exemple, la suite $v_n = n/(n-1)$ est bornée et décroissante.

Quatre méthodes pour démontrer qu'une suite est monotone :
1. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et déterminer son signe.
2. Calculer $u_{n+1}/_n$ et regarder si c'est plus grand ou plus petit que 1.
3. Dans le cas où $u_n = f(n)$, on peut étudier la fonction f.
4. Faire une preuve par récurrence, en particulier dans le cas des suites définies par récurrence mais pas seulement.

Exemple : si $u_n = 2^n/(n!)$, alors la méthode 2. convient très bien.

(c) Suites convergentes et divergentes – On s'intéresse ici au comportement lorsque $n \to \infty$ de la suite (u_n). Trois cas peuvent se présenter :
(i) la suite a une limite finie, $\ell \in \mathbb{R}$;
(ii) la suite a une limite infinie, $\pm\infty$;
(iii) la suite n'a pas de limite.

Dans le cas (i) on dit que la suire (u_n) est *convergente* alors qu'on dit qu'elle est *divergente* dans les deux autres cas. Plus précisément, voici quelques définitions qui sont évidemment similaires à celles vues pour les fonctions :

(u_n) tend vers $+\infty$: $\forall A > 0,\ \exists n_0(A),\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$

(u_n) tend vers zéro : $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0(\epsilon) > 0,\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \epsilon$

(u_n) tend vers ℓ revient à dire que $v_n := u_n - \ell$ tend vers 0.

Exemples : $u_n = 1/n$ tend vers zéro ; $v_n = n^2 - 4n$ tend vers $+\infty$; $w_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

(d) Suites de référence – Les limites suivantes se démontrent tout simplement en calculant $n_0(\epsilon)$ dans la définition ci-dessus, tout comme pour les fonctions.

Suites tendant vers l'infini (ici $\alpha > 0$ et $a > 1$) : $(\ln n)$, (n^α), (a^n).

Suites tendant vers zero : $(1/\ln n)$, (n^α) avec $\alpha < 0$, e^{-n}, (a^n) avec $|a| < 1$.

(e) Opération sur les suites – on retrouve les mêmes propriétés que pour les fonctions, lorsque $x \to \infty$:

Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, alors $u_n + v_n \to \ell + \ell'$, $u_n \cdot v_n \to \ell \cdot \ell'$ et $u_n/v_n \to \ell/\ell'$ à condition que $\ell' \neq 0$.

Dans le cas des infinis, on retrouve aussi les mêmes règles : $+\infty \times +\infty = +\infty$, $1/0^+ = +\infty$ etc...

Le théorème des gendarmes s'applique : si $u_n \leq v_v \leq w_n$ avec $\lim u_n = \lim w_n$ alors la limite de v_n est la même, qu'il s'agisse d'une limite finie ou infinie.

Il reste évidemment à étudier les formes indéterminées comme pour les fonctions, les résultats de croissance comparées étant les même.