L1S2 Informatique — Université de Tours
Notes de Cours 2018-2019
Emmanuel Chasseigne

Cours Numéro 8 — *Intégrale de Riemann*

Dans tout ce cours, f désigne une fonction défnie sur un intervalle $I = [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$ deux réels. L'intégrale de f entre a et b mesure l'aire sous la courbe représentative de f entre les axes $x = a$ et $x = b$.

(a) Fonctions en escalier — On va d'abord définir l'intégrale pour des fonctions simples avant de généraliser la notion.

Définition — On appelle subdivision de l'intervalle $I = [a, b]$ toute suite finie $\sigma = (x_i)$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. On note $S([a, b])$ l'ensemble de toutes les subdivisions de I et on appelle pas de la subdivision la quantité $m := \max(x_{i+1} - x_i)$.

Définition — Une fonction $\varphi : [a, b]$ est dite en escaliers sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma \in S(I)$ telle que $\varphi = \lambda_i$ est constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. La subdivision est dite adaptée. On note $\mathrm{Esc}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$, qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et de plus, si $f, g \in \mathrm{Esc}([a, b])$, alors fg aussi.

Définition — Si $\varphi \in \mathrm{Esc}([a, b])$, on appelle intégrale de φ le nombre réel

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)\,.$$

On démontre que ce réel ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie, et on le note $\int_a^b \varphi(x)\,dx$.

(b) Fonctions intégrables au sens de Riemann — La définition suivante permet de donner un sens à l'intégrale des fonctions qui ne sont pas en escalier.

Définition — Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dit intégrable au sens de Riemann si pour tout $\epsilon > 0$ il existe deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathrm{Esc}([a, b])$ telles que

$$\forall x \in [a, b]\,,\ \varphi(x) \leq f(x)\psi(x) \quad \text{et} \quad \Big| \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \Big| \leq \epsilon\,.$$

Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, on note

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sup_{\substack{\varphi \in \mathrm{Esc}([a,b]) \\ \varphi \leq f}} \int_a^b \varphi(x)\,dx = \inf_{\substack{\psi \in \mathrm{Esc}([a,b]) \\ \psi \geq f}} \int_a^b \psi(x)\,dx\,.$$

On note $\mathrm{R}([a,b])$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$.

(c) Propriétés —

Théorème — Toute fonction continue ou monotone sur $[a,b]$ est dans $\mathrm{R}([a,b])$.

Proposition —
(i) $\mathrm{R}([a,b])$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
(ii) si $f \geq 0$ est dans $\mathrm{R}([a,b])$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
(iii) relation de Chasles : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
(iv) inégalité triangulaire: $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Conséquence: si $m \leq f \leq M$ sur $[a,b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)\,.$$

(d) Primitives —

Théorème — Toute fonction f continue sur $[a,b]$ admet des primitives sur $[a,b]$, données par:

$$f(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C\,.$$

Conséquence: si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

(e) Autres techniques —

Proposition — (IPP). Soient $u, v \in C^1([a,b])$. Alors on a

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,.$$

Proposition — (Changement de variables) Soit f continue et $\varphi \in C^1([a,b])$ telle que $\varphi([a,b]) \subset$. Alors $f \circ \varphi \in \mathrm{R}([a,b])$ et

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f \circ \varphi(y)\varphi'(y)\,dy\,.$$

Exemple : $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$ en posant $t = \sqrt{x}$.