L1S2 Informatique — Université de Tours
Notes de Cours 2018-2019
Emmanuel Chasseigne

Cours Numéro 2 — *Fonctions réelles : dérivabilité et fonctions réciproques*

N.B. — Dans tout ce chapitre, on considère un intervalle I et une fonction f tels que:
(i) $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, c'est-à-dire un intervalle de la forme $I =]a\,;b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.
(ii) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application. Autrement dit, $I \subset \mathcal{D}_f$, donc f est définie au moins sur I.
Rappel: Comme I est ouvert, pour tout point $x_0 \in I$, il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta\,; x_0 + \delta[\ \subset I$. Ainsi, la fonction f est définie au voisinage de x_0, et au point x_0.

(a) Dérivabilité

Définition. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 définie par

$$\tau_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie en x_0. Cette limite s'appelle alors *le nombre dérivé* de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

Proposition — *Si f est dérivable en $x_0 \in I$, alors la droite d'équation $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ s'appelle la tangente à la représentation graphique C_f de f en x_0. C'est la droite passant par le point $(x_0, f(x_0))$ et de pente $f'(x_0)$.*

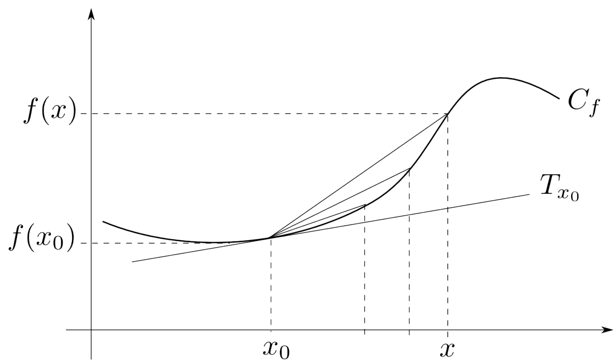

Figure 1: *Taux d'accroissement et tangente à la courbe.*

Cela implique que si la fonction f est dérivable au point x_0, alors on a

$$\forall x \in I\ ,\ f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\big(f'(x_0) + \epsilon(x - x_0)\big)$$

avec $\lim \epsilon(y) = 0$ lorsque $y \to 0$.

Remarque. Ce dernier résultat admet une réciproque: l'existence d'un développement de f de ce type au voisinage de x_0 assure que f est dérivable en x_0.

Le plus souvent on posera $x = x_0 + h$, donc le taux d'accroissement s'écrit également:

$$\delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

et la dérivée (quand elle existe) est obtenue en prenant la limite quand $h \to 0$ de $\delta_{x_0}(h)$.

Remarque. Si $\lim \tau_{x_0}(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 mais sa courbe représentative admet une tangente verticale au point x_0. C'est par exemple le cas pour la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ définie sur $\mathbb{R}$, en $x_0 = 0$.

Proposition — *Soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Attention, la réciproque de cette proposition est fausse ! (contre-exemple typique: $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$).

Définition. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la fonction $f' : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$ s'appelle *la fonction dérivée* de f.

Remarque — on peut définir des notions de dérivées à gauche et à droite à partir des limites à gauche et à droite. On a alors le immédiatement résultat suivant:

Proposition — *Soit $x_0 \in I$. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$. Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

(b) Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition — *Soient f et g deux fonctions dérivables en $x_0 \in I$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:*

* *$f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$*
* *λf est dérivable et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$*
* *fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$*
* *Si $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$*

On déduit de cette proposition que la somme, le produit, le quotient (lorsque celui-ci est bien défini !) de fonctions dérivables sur un intervalle est dérivable sur cet intervalle.

Proposition — *Soient I et J deux intervalles ouverts et soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.*

* *Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,.$$

* *Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'\,.$$

Cette propriété explique les formules de Terminale: $(e^u) = e^u u'$ etc.

(c) Fonctions réciproques —

Proposition — *Soient I et J deux intervalles ouverts. On suppose que $f : I \longrightarrow J$ est bijective.*

$*$ *Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$*$ *Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur I et*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Exemple 1. Soit $f : \mathbb{R} \to]0\,;+\infty[$, $f(x) = e^x$. Alors sa bijection réciproque est $f^{-1}(y) = \ln(y)$, définie de $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de dérivation de la réciproque:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

et on retrouve bien la dérivée du logarithme.

Exemple 2. On définit les fonctions arccos et arcsin comme réciproque des fonctions cos et sin (sur les bons intervalles). Par application directe du résultat sur la dérivation de f^{-1}, on voit que

$$(\arccos)'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\,, \quad (\arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

On voit donc également que $\arccos + \arcsin = \pi/2$, puisqu'en effet $\cos(x + \pi/2) = \sin(x)$.

(d) Extremum local, Théorème de Rolle, accroissements finis

Définition. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f admet un maximum local en x_0 si $f(x) \leq f(x_0)$ au voisinage de x_0.
2. On dit que f admet un minimum local en x_0 si $f(x) \geq f(x_0)$ au voisinage de x_0.

On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum ou un minimum local en x_0.

Attention, dire que f admet un maximum local en x_0 ne signifie pas que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in I$: cette inégalité est seulement vraie *au voisinage* de x_0. Un contre-exemple typique est celui de la fonction $f(x) = (x^2-1)^2$ sur $I = \mathbb{R}$, qui admet un maximum local au point $x_0 = 0$.

Théorème — *Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$ et f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque. La réciproque de ce Théorème est fausse (penser à la fonction $x \mapsto x^3$): il s'agit d'une condition nécessaire mais pas suffisante. En pratique, pour trouver les extrema locaux de f on tracera le tableau de variations de f.

Théorème de Rolle — *Si f est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Le théorème des accroissements finis généralise le théorème de Rolle dans le cas où $f(a) \neq f(b)$:

Théorème des accroissements finis — *Si f est continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$, alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.*

Remarques:
(i) le point c obtenu dans les théorèmes ci-dessus n'est pas unique en général;
(ii) à partir du théorème des accroissement,finis, on peut obtenir des majorations et minorations de l'écart $f(a) - f(b)$ dès que l'on sait majorer/minorer la dérivée de f, *cf.* Exercices.

(e) Dérivabilité et monotonie

Proposition — *Soit f une fonction dérivable sur I. Alors*
1. *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ sur I;*
2. *f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ sur I;*
3. *f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ sur I.*

On rappelle que si f est dérivable sur I, elle est continue sur I.
Pour la monotonie stricte, on a une condition suffisante:

Proposition — *Soit f une fonction dérivable sur I.*
1. *Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.*
2. *Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.*

Remarque. Attention, le fait que I est un intervalle est important: si $f(x) = 1/x$, définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ mais f n'est pas globalement croissante. Elle est cependant croissante sur chaque intervalle séparemment: $I_1 =]-\infty\,;0[$ et $I_2 =]0\,;+\infty[$.

(f) Dérivée seconde

Définition. Soit f une fonction dérivable sur I. On dit que f est deux fois dérivable en $x_0 \in I$ si la fonction dérivée f' est dérivable en x_0. Dans ce cas on note $f''(x_0)$ le nombre dérivé de f' en x_0. On définit ainsi de même la fonction f'' sur I si f' est dérivable sur I

Définition. Soit f une fonction dérivable sur I et soit $x_0 \in I$. On dit que x_0 est un point d'inflexion de f si la courbe représentative de f traverse sa tangente en x_0.

Remarque. Un point d'inflexion n'est jamais un extremum local.
Exemple typique: $f(x) = x^3$ au point $x_0 = 0$.

Proposition 0.1. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I et $x_0 \in I$ un point tel que $f'(x_0) = 0$.*
1. *si $f'' \geq 0$ au voisinage de x_0 alors f admet un minimum local en x_0;*
2. *si $f'' \leq 0$ au voisinage de x_0 alors f admet un maximum local en x_0;*
3. *si f'' s'annule en changeant de signe en x_0 alors x_0 est un point d'inflexion de f.*

On a également le résultat suivant, utile en pratique (mais qui ne dit rien sur le cas $f''(x_0) = 0$):

Proposition 0.2. *Soit f une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$. On suppose que f est deux fois dérivable en x_0.*
1. *si $f''(x_0) > 0$ alors f admet un minimum local en x_0;*
2. *si $f''(x_0) < 0$ alors f admet un maximum local en x_0.*

(g) Convexité

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si pour tout couple $(x, y) \in I^2$ et tout $t \in [0\,; 1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)\ .$$

Remarques:
(i) Si on remplace l'inégalité large par une inégalité stricte, on dira que f est strictement convexe.
(ii) Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite concave si la fonction $(-f)$ est convexe.

Proposition *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe alors pour tout couple de points $(x, y) \in I^2$, le segment $\big[(x, f(x)); (y, f(y))\big]$ est situé au dessus de la courbe représentative de f.*

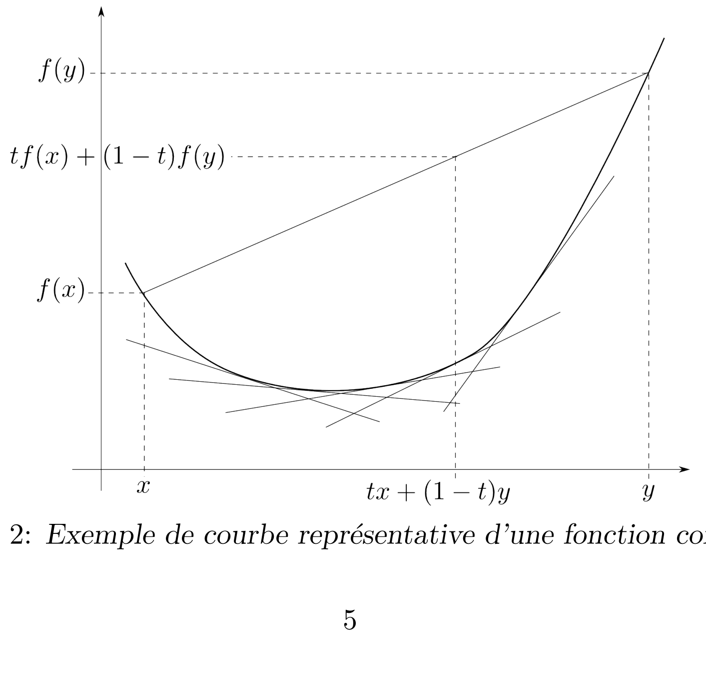

Figure 2: *Exemple de courbe représentative d'une fonction convexe.*

Proposition — *Soit f une fonction dérivable sur I. Alors f est convexe si et seulement si sa fonction dérivée f' est croissante sur I ou, de façon équivalente, si et seulement si la courbe représentative de f se situe au dessus de chacune de ses tangentes sur I.*

Proposition — *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe si et seulement si sa fonction dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles sur I.*

Remarque. Cette dernière caractérisation permet de vérifier facilement que les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont convexes; la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0\,;+\infty[$.