L1S2 Informatique — Université de Tours
Notes de Cours 2018-2019
Emmanuel Chasseigne

Cours Numéro 1 — *Fonctions réelles : limites et continuité*

1 Généralités

(i) Une *fonction* f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une association qui, à $x \in \mathbb{R}$ associe au plus une valeur $f(x)$ dans $\mathbb{R}$; il existe donc potentiellement certaines valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ n'est pas défini.

(ii) L'*ensemble de définition* de f, noté $\mathcal{D}_f$, est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ est défini. Ainsi, $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est une application.

(iii) Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la *courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ *de* f est l'ensemble des points dont les coordonnées appartiennent au graphe de f, défini par : $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x)\}$.

(iv) Dans la définition d'une fonction, la variable souvent notée x est une variable dite *muette* (comme dans les sommes) : les expressions $f(x) = 3x^2 - 1$, $f(y) = 3y^2 - 1$ et $g(P) = 3P^2 - 1$ définissent la même fonction.

Exemple : l'expression $f(x) = 1/x$ définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; l'expression $g(Q) = \sqrt{Q} - 2e^Q$ définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_g = [0; +\infty[$.

Dans toute la suite, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition.

(a) Définitions

Définition. On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in \mathbb{R}, x \leq t \leq y \Longrightarrow t \in I.$$

Définition. Soit A une partie non vide de $\mathcal{D}_f$. On dira que :
1. f est *majorée* (respectivement *minorée*) sur A s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :
$\forall x \in A,\ f(x) \leq a$ (respectivement $f(x) \geq a$).
2. f est *bornée* sur A si elle est majorée et minorée sur A, c'est-à-dire :
$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in A,\ a \leq f(x) \leq b$
Autrement dit, f est *bornée* sur A s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$.

Définition. (Monotonie sur un intervalle) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathcal{D}_f$.
1. f est *croissante* (respectivement *décroissante*) sur I si
$\forall (x, y) \in I^2,\ \ x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \quad$ (respectivement $f(x) \geq f(y)$).

2. f est *strictement croissante* (respectivement *strictement décroissante*) sur I si $\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \implies f(x) < f(y) \quad$ (respectivement $f(x) > f(y)$).

3. f est *(strictement) monotone* sur I si f est (strictement) croissante ou décroissante sur I.

(b) Voisinages

Définition. (Voisinages)

1. f est définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si $(\exists \delta > 0)\,,\ ]\,a-\delta; a+\delta\,[\setminus\{a\} \subset \mathcal{D}_f$.
2. f est définie dans un voisinage à gauche de $a \in \mathbb{R}$ si $(\exists \delta > 0)\,,\ ]\,a-\delta; a\,[\subset \mathcal{D}_f$.
3. f est définie dans un voisinage à droite de $a \in \mathbb{R}$ si $(\exists \delta > 0)\,,\ ]\,a; a+\delta\,[\subset \mathcal{D}_f$.
4. f est définie au voisinage de $+\infty$ si $(\exists A \in \mathbb{R})\,,\ ]\,A; +\infty\,[\subset \mathcal{D}_f$.
5. f est définie au voisinage de $-\infty$ s'il existe $(\exists A \in \mathbb{R})\,,\ ]-\infty; A\,[\subset \mathcal{D}_f$.

Remarque importante : Dans les cas 1-2-3, on ne suppose pas que la fonction est définie en a. Dans ce qui suit, il n'est pas nécessaire qu'elle soit définie en a lorsque l'on étudie sa limite éventuelle en a, mais elle doit l'être lorsque l'on examine sa propriété de continuité ou de dérivabilité au point a.

Définition. (Propriétés au voisinage)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est définie au voisinage de a. On dira qu'une propriété (P) portant sur f est vraie au voisinage de a s'il existe $\delta > 0$ tel que la propriété est vraie sur $]\,a-\delta, a+\delta\,[\setminus\{a\}$.

De même, si f est définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) : on dira qu'une propriété (P) portant sur f est vraie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur $\mathcal{D}_f \cap\,]\,A, +\infty[$ (respectivement $\mathcal{D}_f \cap\,]-\infty, A\,[$).

2 Limites

(a) Définitions

On introduit la notation suivante $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction réelle définie au voisinage de a (fini ou non).

Définition. On dit que f admet $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ comme limite en a si :

Cas $a \in \mathbb{R}$ **et** $\ell \in \mathbb{R}$: $(\forall \epsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{D}_f)\,\big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\big)$.

Cas $a \in \mathbb{R}$ **et** $\ell = +\infty$: $(\forall B \in \mathbb{R})\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{D}_f)\,\big(|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > B\big)$.

Cas $a = +\infty$ **et** $\ell \in \mathbb{R}$: $(\forall \epsilon > 0)\,(\exists A \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \mathcal{D}_f)\,\big(x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\big)$.

Cas $a = -\infty$ **et** $\ell = +\infty$: $(\forall B \in \mathbb{R})\,(\exists A \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \mathcal{D}_f)\,\big(x < A \Rightarrow f(x) > B\big)$.

Remarque. Si la fonction f est définie en $a \in \mathbb{R}$ et admet une limite ℓ en a alors on a $f(a) = \ell$.

Théorème 2.1. *Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a alors cette limite est unique. On note* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *ou encore* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque. Les trois résultats suivants sont évidents et très utiles :

$$\begin{array}{lcll}
\lim_{x\to a} f(x) = 0 & \Longleftrightarrow & \lim_{x\to a} |f(x)| = 0 & (a \in \overline{\mathbb{R}}), \\
\lim_{x\to a} f(x) = \ell & \Longleftrightarrow & \lim_{x\to a} f(x) - \ell = 0 & (a \in \overline{\mathbb{R}}, \ell \in \mathbb{R}), \\
\lim_{x\to a} f(x) = \ell & \Longleftrightarrow & \lim_{h\to 0} f(a+h) - \ell = 0 & (a, \ell \in \mathbb{R}).
\end{array}$$

Proposition 2.2 (caractérisation séquentielle de la limite)**.** *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{D}_f$ de limite a, $f(x_n)$ a pour limite ℓ.*

Remarque. La proposition donne une méthode pour prouver qu'une fonction n'a pas de limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Il suffit pour cela de trouver deux suites (x_n) et (x'_n) tendant toutes deux vers $a \in \mathcal{D}_f$ telles que $f(x_n) \to \ell$ et $f(x'_n) \to \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

(b) Limites à gauche, limites à droite

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Soit f une fonction définie dans un voisinage à gauche de a. On dit que f admet une *limite à gauche* au point a si $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a$, avec $x < a$. Dans ce cas, cette limite est unique et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$.
2. Soit f une fonction définie dans un voisinage à droite de a. On dit que f admet une *limite à droite* au point a si $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a$, avec $x > a$. Dans ce cas, cette limite est unique et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$.

Étant donnée une fonction f dont le domaine de définition est $\mathcal{D}_f$, il est parfois utile de restreindre son domaine de définition à un sous-ensemble $A \subset \mathcal{D}_f$. La nouvelle fonction obtenue est appelée la restriction de f à A (et la notation est $f|_A$) dans le sens où la même formule définit cette nouvelle fonction, et seul son domaine de définition change.

Ainsi, Dire que f admet une limite à gauche en $x = a$ est équivalent à dire que la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap \,]-\infty; a[$ admet une limite ℓ en a. De même pour la limite à droite, avec la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap \,]a, +\infty[$.

Proposition 2.3. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit f une fonction réelle définie au voisinage de a.*

- *Si f est définie en a alors :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \left(\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \textbf{ et } f(a) = \ell \right).$$

- *Si f n'est pas définie en a alors :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell.$$

(c) Propriétés des limites

Proposition 2.4. *Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.*

Proposition 2.5. *Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet une limite finie ℓ non nulle en a alors f est du même signe que ℓ au voisinage de a.*

Proposition 2.6 (Conservation des inégalités *larges* par passage à la limite)**.** *Si $f \leq g$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.*

Remarque. Dans l'énoncé de la propriété précédente, même si $f < g$ (inégalité *stricte*) au voisinage de a, on n'obtiendra à la limite que $\ell \leq \ell'$ (inégalité *large*).

(d) Théorèmes d'existence

Proposition 2.7. *(Opérations sur les limites) Les résultats du chapitre* Suites Réelles *s'étendent aux fonctions (avec les mêmes formes indéterminées).*

Proposition 2.8. *(composition de limites) Soient f, g deux fonctions réelles telles que f est définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et g est définie au voisinage de $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\textbf{\textit{Si}} \quad \Big(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \quad \textbf{\textit{et}} \quad g(y) \underset{y\to \ell}{\longrightarrow} \lambda\Big) \quad \textbf{\textit{alors}} \quad g\circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda.$$

Théorème 2.9. *(Théorème des gendarmes) Soient f, g, h trois fonctions réelles et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *Si $f \leq g \leq h$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.*
2. *Si $f \leq g$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.*
3. *Si $f \leq g$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

Théorème 2.10. *(Limites de fonctions monotones)*

1. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction réelle définie à gauche au voisinage de a. S'il existe $\delta > 0$ tel que f est croissante sur $]\,a-\delta, a\,[$ alors f admet une limite à gauche en a. Si de plus f est majorée sur $]\,a-\delta, a\,[$ alors cette limite est finie.*
2. *Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$. S'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f est croissante sur $]\,A, +\infty[$ alors f admet une limite en $+\infty$. Si de plus f est majorée sur $]\,A, +\infty[$ alors cette limite est finie.*

On adapte facilement ces résultats au cas où f est décroissante.

3 Continuité

(a) Continuité en un point

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie au voisinage de a. On suppose de plus que f est définie au point a, autrement dit que $a \in \mathcal{D}_f$.

1. f est *continue* en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ c'est-à-dire,
   $$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{D}_f)\,(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$
2. f est *continue à gauche* en a si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ c'est-à-dire,
   $$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{D}_f)\,(x \in]a-\delta, a] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$
3. f est *continue à droite* en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ c'est-à-dire,
   $$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{D}_f)\,(x \in]a, a+\delta[\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$
4. Si f n'est pas continue en a, on dira qu'elle est discontinue en a.

Proposition 3.1. *Soit f une fonction définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et telle que $a \in \mathcal{D}_f$. Alors f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.*

Remarque. D'après la Proposition 2.2 on peut caractériser la continuité à l'aide des suites :

$$\Big(f \text{ est continue en } a\Big) \iff \Big(\text{Pour toute suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ à valeur dans } \mathcal{D}_f \text{ et de limite } a,\ f(x_n) \to f(a)\Big)$$

Nous pouvons répéter ce qui est expliqué dans la Remarque 2 : c'est un critère très utile en pratique pour prouver la continuité ou la discontinuité de f en un point a.

Définition. Si f est définie au voisinage d'un point a sans être définie en a et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors la nouvelle fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \ell & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \end{cases}$$

est continue en a. Cette fonction g est appelée *le prolongement par continuité de f en a*. Son domaine de définition est $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f \cup \{a\}$. De manière évidente on définit la notion de prolongement par continuité à droite (respectivement à gauche).

Proposition 3.2. *(Opérations sur les fonctions continues)*

1. *Si f et g sont continues en a, alors $|f|$, $f+g$ et fg sont continues en a.*
2. *Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.*
3. *Si f est une application continue en a et g est une application continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.*

(b) Continuité sur un intervalle

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

On déduit facilement de la Proposition 3.2 que la valeur absolue, la somme, le produit, le quotient (avec une fonction non-nulle sur I au dénominateur !) de deux fonctions continues sur I est continue sur I.

Proposition 3.3. *Si f est une application continue sur I et à valeurs dans J et g est une application continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.*

Théorème 3.4. *(Théorème des valeurs intermédiaires) Si f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. En d'autres termes, pour tout $a, b \in I$, f atteint entre a et b toutes les valeurs (intermédiaires) entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Théorème 3.5. *(fonctions continues sur un segment) Si f est continue sur le segment $[a, b]$ avec $a < b$ alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes c'est-à-dire qu'il existe des réels m et M tels que :*

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Remarque. Attention, le théorème 3.5 nécessite que l'intervalle sur lequel f est continue soit *fermé et borné* ; on peut aisément construire des contre-exemples quand ce n'est pas le cas.

Théorème 3.6. *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors f est une bijection de I sur $f(I)$.*

Remarque. Ce théorème est très utile. Précisons-le dans deux cas particuliers :

1. Si f est continue et strictement croissante sur le segment $[a, b], a < b$ alors f définie une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
2. Si f est continue et strictement croissante sur le segment $]a, b[$, alors f définie une bijection de $]a, b[$ sur $]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[$
   [Pourquoi ces deux dernières limites existent-elles ? Écrire un énoncé en remplaçant a par $-\infty$ et b par $+\infty$.].

Si f est strictement décroissante, **ne pas oublier d'échanger** les bornes des intervalles d'arrivée dans les énoncés ci-dessus.