**Université de Tours** **L3 Mathématiques**
**Année 2018-2019** **Intégration**

**Examen de session 2**
**Durée de l'épreuve : 3 heures**

---

Les exercices sont indépendants. Vous pouvez admettre une question et traiter les suivantes. Les réponses devront être étayées par des arguments construits. Bon travail !

---

On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

**Exercice 1** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer à quels espaces $\mathcal{L}^p$, avec $p \in [1, +\infty[$, elles appartiennent :

$$f \ : \ x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} e^{-x} 1_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g \ : \ x \mapsto \frac{x}{1 + |x|^{5/3}}.$$

**Exercice 2** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n$ de la façon suivante :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2(x - n + 1/n) & \text{si } x \in [n - 1/n, n[, \\ -n^2(x - n - 1/n) & \text{si } x \in [n, n + 1/n[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Tracer l'allure du graphe de $f_n$ et déterminer l'intégrale de $f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction que l'on déterminera et dont on calculera l'intégrale.
3) Comment expliquer l'apparente contradiction entre les deux premières questions ?

**Exercice 3** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{n+2}}.$$

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2) On note $u_n$ l'intégrale de $f_n$ sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer la limite de la suite de $(u_n)_n$.

**Exercice 4** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}.$$

1) Démontrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F'$ comme une intégrale à paramètre.
2) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $F$ est solution de l'équation différentielle $F'(x) = -xF(x)$.
3) En admettant que $F(0) = 1$ déterminer la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 5** On définit la fonction $L$ de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ en posant, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$L(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{xt}}{e^t + e^{-t}} dt.$$

1) On pose $J = ]-1, 1[$. Démontrer que $L$ est finie sur $J$. Que dire de $L(x)$ si $x \notin J$ ?
2) Démontrer que la fonction $L$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $J$ et exprimer ses deux premières dérivées sous forme intégrale. En déduire que $L$ est convexe sur $J$.
3) Soit $(x_n)_n$ une suite croissante d'éléments de $J$ qui converge vers 1. Quelle est la limite de la suite $(L(x_n))_n$ ? En déduire $\lim_{x \to 1^-} L(x)$.
4) Soit $x \in ]0, 1[$ fixé. Démontrer, en posant $t = v/(1-x)$, que

$$L(x) = \frac{1}{1-x} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-v}}{1 + e^{-2v/(1-x)}} dv.$$

5) En déduire la limite de $(1-x)L(x)$ lorsque $x$ tend vers 1 par valeurs inférieures.

**Exercice 6** On pose, pour $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1) Démontrer que $\Gamma(x)$ est un réel strictement positif.
2) Démontrer que pour tout réel $x > 1$, $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$.
3) Calculer $\Gamma(1)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4) Démontrer que la fonction $\Gamma$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra tout d'abord montrer le résultat sur un intervalle de la forme $]\varepsilon, +\infty[$ pour $\varepsilon > 0$.
5) Démontrer de même que $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.