CC2 Analyse 4 , durée : 2h. Barème indicatif sur 24 pts.

Les calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

Exercice 1. *8 pts (Séries entières classiques, rayon, opérations TàT, CVN, Abel,...)*

1. Trouver le rayon de convergence R et l'expression de la somme (pour $x \in]-R, R[$) de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$.

2. Trouver l'expréssion de la somme et le rayon de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} x^n$.
Indication : on peut se ramener à la série exponentielle.

3. (a) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
(b) En déduire les rayons des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$.
(c) Etudier la convergence de chacune de ces trois séries aux extrémités du domaine de convergence.
(d) Montrer que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$ est continue sur $[-1, 1]$.
Puis, montrer la continuité de $T : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ sur $[-1, 1[$.

4. Vérifier que la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$ a un rayon de convergence $R \leq 1$, puis montrer que R vaut précisement 1.

Exercice 2. *6.5 pts (Résolution des équadiff, développement en série entière)*

1. Rappeler l'expression de la somme $S(.)$ de la série géométrique
$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \qquad \text{pour } x \in]-1, 1[.$$

2. (a) Trouver sous la forme d'une série entière une solution de l'équation différentielle
$$xy'(x) - y(x) = x^2 S(x).$$
(b) Sur quel intervalle la solution obtenue est-elle valable ?
(c) Donner une expression de $y(.)$ en exprimant la série obtenue à l'aide de celle de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$.

3. (a) Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$, faire le lien avec $S(.)$ et en déduire de développement en série entière de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

   (b) Préciser le domaine dans lequel le développement est valable.

   (c) Retrouver le développement en série entière de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ en utilisant le produit de Cauchy.

Exercice 3. *9.5 pts (Séries de Fourier, Dirichlet, Parseval. Opérations TàT, CVN, Abel,...)*
On désigne par $f(.)$ la fonction 2π-périodique donnée sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = |x|$.

1. Esquisser le graphe de $f(.)$. La fonction $f(.)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? De classe $PC^1_{2\pi}$? On ne demande pas de justification formelle, juste des explications en lien avec votre croquis.
2. Montrer que la série de Fourier de $f(.)$ s'écrit

$$(*) \qquad SF_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

3. Pour quels points $x \in \mathbb{R}$ a-t-on l'égalité $SF_f(x) = f(x)$?
4. Déduire de $(*)$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
5. Trouver la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.
6. (a) Déduire de $(*)$ l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$ pour $x \in [0, \pi]$ puis pour $x \in [-\pi, 0]$.

   (b) Déduire de $(*)$ que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}$ pour $x \in]0, \pi[$.
   Justifier soigneusement.

   (c) Montrer que la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)}$ n'est pas uniforme sur $[0, \pi]$.

   (d) Proposer une méthode pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^8}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{10}}$, etc (on ne demande pas d'effectuer les calculs).