UNIVERSITE DE TOURS /**Faculté des Sciences & Techniques**

LICENCE de MATHEMATIQUES (L1)

Année universitaire 2018-2019 – semestre 2

Module 2.2 Rattrapage- 20 juin 2019- Suites et fonctions

Durée : 2h

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé durant l'épreuve. Il est demandé de rédiger des réponses, et lorsque c'est utile de citer des énoncés clairs dans le cadre de démontrations précises.

Exercice 1 (5 points)
1. Ecrire après avoir donné la définition générale, le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $g(x) = e^{2x}\cos(3x)$.
2. Déterminer, si elle existe, la limite à l'origine (x tend vers 0) de la fonction $q(x) = \frac{e^x-1}{\ln(1+x)}$.
Indication : on pourra utiliser des développements limités

Exercice 2 (7 points)
On considère la fonction $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ et l'on définit la suite (u_n) en posant :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier}\, n, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. a) Etudier le sens de variation de f.
b) En déduire que, pour tout entier n, $\sqrt{2} \leq u_n$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{2}$, on a $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
4. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Retrouver la limite de (u_n)

Exercice 3 (4 points)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

1. Montrer que ces suites sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.
2. Pour quelle plus petite valeur de n_0 de n cette limite ℓ est-elle approchée à 10^{-2} près par u_{n_0} ?

Exercice 4 (4 points)
Soit la fonction h définie sur $I =]-1, 1[$ par $h(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$.
1. Montrer que h est continue en 0, continue sur I et strictement croissante sur I.
2. Déterminer sa réciproque.

Le barème mentionné est seulement indicatif