Université de Tours
Mathématiques

L1 MPI
2018-2019

Contrôle continu de raisonnement - Jeudi 25 octobre 2018

Durée : **1 h 30**
Documents et calculatrices interdits.
Il est indispensable de rédiger des preuves, ou de donner des contrexemples explicites.

Exercice 1. (10 min.) Soient E et F les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :

$$E = \{2, 3, 4, 7, 9\}\,,\ \ F = \{1, 5, 6, 9\}\,.$$

1. On considère l'application $f : E \longrightarrow F$ définie par :

$$f(2) = 9, \quad f(3) = 5, \quad f(4) = 5 \quad f(7) = 6 \quad f(9) = 9.$$

Exprimez les ensembles suivants par extension (on ne demande pas de justification) :

(a) $f(E)$.
(b) $F \backslash f(E)$.
(c) $f^{-1}(\{6, 9\})$.

Exercice 2. (30 min.) Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on définit le symétrisé de A, noté $\mathcal{S}(A)$, par :

$$\mathcal{S}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ ou } -x \in A\}\,.$$

1. Déterminez $\mathcal{S}\left([1, 2]\right)$.
2. Déterminez $\mathcal{S}\left([-2, -1]\right)$.
3. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Démontrez **soigneusement** que

$$A \subset B \implies \mathcal{S}(A) \subset \mathcal{S}(B).$$

4. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Démontrez **soigneusement** que

$$\mathcal{S}(A \cap B) \subset \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B).$$

5. A-t-on

$$\mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \subset \mathcal{S}(A \cap B)$$

pour tous sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$?

Exercice 3. (15 min.) On considère l'assertion P suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geq 3 \text{ ou } x \leq -5) \implies x^2 \geq 9. \qquad (P)$$

1. Démontrez P.
2. Soit R l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 9 \implies (x \geq 3 \text{ ou } x \leq -5). \tag{R}$$

   Écrivez la négation de R.
3. R est-elle vraie ou fausse ? (Démontrez votre réponse).

Exercice 4. (20 min.) Démontrez pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Exercice 5. (15 min.) Soit E un ensemble de cardinal n, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$,

$$E_k = \{A \in \mathcal{P}(E) \ \mid \ \text{card}(A) = k\}.$$

1. Décrivez, par une phrase simple, l'ensemble E_k et déterminez $\text{card}(E_k)$.
2. Soit $k \in \{1, ..., n\}$. Exprimez le cardinal de $E_{k-1} \cup E_k$ en fonction de k et de $n+1$ en justifiant soigneusement chaque étape de calcul.