Université de Tours 2018/2019

L2-Math : Analyse 3

Examen

Durée : 2 heures

Les documents et les dispositifs électroniques de calcul (calculatrices, smartphones,...) sont interdits.

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants. La plupart des questions peuvent être traitées sans avoir sû répondre à la précédente. Le correcteur tiendra compte de la qualité de rédaction.

Exercice 1. Déterminer si les intégrales ci-dessous sont convergentes ou divergentes

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}dt$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{1+t}}dt$

Déterminer si les séries ci-dessous sont convergentes ou divergentes

- $\displaystyle\sum \frac{n^4+4}{3^n}$
- $\displaystyle\sum \left(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$, on pourra montrer dans un premier temps que

$$e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1 = \frac{(-1)^n}{n^{1/2}} + \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{6n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}}).$$

Exercice 2. On considère $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\}$. Calculer l'intégrale double

$$\iint_A x^2y\,dxdy$$

On considère $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$. Calculer l'intégrale double :

$$\iint_B \frac{x\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$$

Exercice 3. On se propose d'étudier la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}x^k$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer la nature (convergence, divergence) de cette série pour $x = \frac{1}{2}$, $x = -1$ et $x = 3$.
2) Dans le cas général, déterminer pour quelles valeurs de x la série converge. On précisera si on a convergence absolue ou pas.

On définit sur $]-1,+\infty]$ la fonction f par $f(x) = \ln(1+x)$.

3) Montrer que, pour $k \geq 1$, la dérivé k-ième de f a pour expression $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

4) Montrer alors que, pour tout $n \geq 1$ et $x \in]-1,+\infty[$, on a

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_n(x)$$

où $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$.

4) On fixe $x \in [0,1]$

a) Justifier que, pour $t \in [0,x]$, on a $\frac{x-t}{1+t} \leq x-t$. Montrer alors que $\lim_n R_n(x) = 0$.

b) Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice 4. On souhaite étudier la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

1) Déterminer les points fixes de f et étudier le signe de $f(x) - x$.
2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$.
3) Si $u_0 < 0$, déterminer la limite (finie ou infinie) de $(u_n)_n$.
4) Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ et que $\lim u_n = 0$ lorsque $u_0 \geq 0$.
5) On souhaite étudier, dans le cas $u_0 > 0$, la vitesse de convergence vers 0 de u_n.

a) Montrer qu'il existe une constante $c \neq 0$ telle que $u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} = c + o(1)$.

b) En déduire que $u_n^{-1} \sim cn$ et $u_n \sim \frac{1}{cn}$.

c) Montrer que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n^2} + o(\frac{\ln n}{n^2})$.