S6. Probabilités et statistiques. 2018/2019. CC1.

Remarque. Sauf mention du contraire, on demande pour chaque question une preuve concise et précise.

Exercice 1 (Cours).

1. Donner la définition d'une tribu.
2. Donner la définition d'une mesure de probabilité.
3. Soit $n \geq 1$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On pose

$$S = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

   Donner la loi de S, son espérance et sa variance. On ne demande aucune justification dans cette question.

Exercice 2. Soient X, Y et Z des variables aléatoires indépendantes de loi $2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx$. Les résultats numériques finaux seront donnés sous forme de fractions irréductibles lorsque c'est possible.

1. Quelle est l'espérance de X ?
2. Quelle est l'espérance de $X + Y + Z$?
3. La variable aléatoire $1/X$ est-elle intégrable ?
4. Quelle est l'espérance de $(X + Y + Z)^2$?
5. Quelle est l'espérance de $(X - Y) \exp(Z)$?

Exercice 3. On ne cherchera pas à expliciter la modélisation dans cet exercice. On demande par contre une présentation concise permettant de comprendre votre démarche et le sens de vos calculs. Les résultats numériques finaux seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

On dispose de deux dés équilibrées (les faces sont équiprobables). L'un des dés comporte 6 faces numérotées de 1 à 6. L'autre dé comporte 12 faces numérotées de 1 à 12. Dans chacune des expériences suivantes, on choisit au départ l'un des deux dés au hasard (de manière équiprobable) puis on lance **ce dé** une ou plusieurs fois. On introduit les évènements suivants :

$$S = \text{« on choisit le dé à 6 faces »},$$
$$D = \text{« on choisit le dé à 12 faces »}$$

et, pour tout $i \geq 1$, l'évènement

$$A_i = \text{« le dé donne 1 au } i^{\text{ième}} \text{ lancer »}.$$

1. On choisit un dé et on le lance une fois. Quelle est la probabilité d'obtenir un 1 ?

2. On choisit un dé et on le lance une fois. Sachant que l'on a obtenu un 1, quelle est la probabilité que l'on ait choisi le dé à 6 faces ?
3. On choisit un dé et on le lance deux fois. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois un 1 ?
4. On choisit un dé et on le lance deux fois. Sachant que l'on a obtenu deux fois un 1, quelle est la probabilité que l'on ait choisi le dé à 6 faces ?
5. Soit $n \geq 1$. On choisit un dé et on le lance n fois. Sachant que l'on a obtenu n fois un 1, quelle est la probabilité p_n que l'on ait choisi le dé à 6 faces ?
6. Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 4. On ne demande pas de preuves détaillées des parties combinatoires de cet exercice. On demande par contre une présentation concise permettant de comprendre votre démarche et le sens de vos calculs. Les résultats numériques finaux seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

On pose $\Omega = \{1,2,3\}^6$. On note $\mathcal{F}$ la tribu de toutes les parties sur Ω et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On travaille dans la suite avec l'univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit des variables aléatoires N_1, N_2 et N_3 en posant, pour tout $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_6) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} N_1(\omega) &= \mathrm{card}\Big(\{i \in \{1,\dots,6\} : \omega_i = 1\}\Big), \\ N_2(\omega) &= \mathrm{card}\Big(\{i \in \{1,\dots,6\} : \omega_i = 2\}\Big), \\ \text{et } N_3(\omega) &= \mathrm{card}\Big(\{i \in \{1,\dots,6\} : \omega_i = 3\}\Big). \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1,\dots,6\}$, on définit la variable aléatoire X_i en posant, pour tout $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_6) \in \Omega$,

$$X_i(\omega) = \omega_i.$$

On s'intéresse également aux évènements

$$\begin{aligned} A &= \text{« deux des } N_s \text{ valent 3 »} \\ \text{et } B &= \text{« les trois } N_s \text{ valent 2 ».} \end{aligned}$$

Ces objets modélisent par exemple l'expérience suivante : on jette 6 dés équilibrés à trois faces numérotées 1, 2 et 3 (on n'essayera pas de visualiser un tel dé !) ; les variables aléatoires X_1 à X_6 modélisent les résultats des 6 dés ; les variables aléatoires N_1, N_2 et N_3 modélisent respectivement le nombre de 1, 2 et 3 obtenus ; A est l'évènement « deux brelans distincts » ; B est l'évènement « trois paires distinctes ».

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment.

1. (a) Soient $a_1, \dots, a_6 \in \{1,2,3\}$. Expliciter

$$\mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_6 = a_6).$$

   (b) Montrer que les X_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1,2,3\}$.

(c) Exprimer N_1 en fonction des X_i.

(d) Quelle est la loi de N_1 ?

(e) Les variables aléatoires N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?

(f) Quelle est la loi de $N_1 + N_2 + N_3$?

(g) Quelle est la loi de $N_1 + N_2$?

2. (a) Quelle est la probabilité de A ?

(b) Quelle est la probabilité de B ?

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$. Soit T une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $1/2$. On suppose que toutes les variables aléatoires précédentes sont indépendantes. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

On pose par ailleurs

$$Z = Y_T.$$

Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$Z(\omega) = Y(\omega)_{T(\omega)}.$$

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que Y_n est une variable aléatoire.
2. Montrer que Z est une variable aléatoire.
3. Soient $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Expliciter

$$\mathbb{P}(Y_n \geq x).$$

4. Soit $x \geq \mathbb{R}$. Expliciter

$$\mathbb{P}(Z \geq x).$$

5. Montrer, pour toute variable aléatoire positive A, l'égalité

$$\mathbb{E}(A) = \int_0^\infty \mathbb{P}(A \geq x)dx.$$

On pourra utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.

6. Déduire des deux questions précédentes l'espérance de Z.
7. Retrouver ce résultat en commençant par calculer

$$\mathbb{E}\left(Z\mathbb{1}_{T=n}\right)$$

pour tout $n \geq 1$.

8. Expliciter $\mathbb{E}(Z^2)$ par la méthode de votre choix.