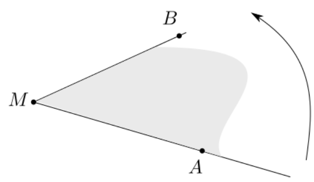
Parcours RMLQA — Année 2018-2019
Université de Tours

Trigonométrie

(a) Notion d'angle – la définition d'un angle (ou secteur angulaire) peut être plus ou moins abstraite. Pour simplifier nous allons adopter la plus courante, à l'aide de demi-droites :

Définition – On appelle *angle* la figure géométrique du plan formée par deux demi-droites concourantes en un même sommet. Sur la figure ci-dessous, on dénote par (AMB) l'angle ainsi obtenu.

Dans le cas des angles dits *orientés* on considère de plus que l'angle obtenu en passant de la demi-droite $[MA)$ vers la demi-droite $[MB)$ n'est pas le même que celui qui consiste à faire le sens inverse. Quand on parle d'angle orienté, on écrit $\widehat{AMB}$ ou $\widehat{BMA}$ pour distinguer les deux angles.



(b) Mesure des angles – Il y a essentiellement deux façons de mesurer les angles : en degrés ou en radian, la conversion de proportionalité étant la suivante : un tour complet $= 360° = 2\pi$ radians.

L'intérêt de mesurer les angles en radian repose sur le principe suivant : sur le cercle unité, la longueur d'un arc d'angle θ (exprimé en radian) est exactement θ. C'est même la définition des radians.

Ainsi : la longueur d'un cercle de rayon 1 est de 2π puisque le tour complet du cercle est effectué pour un angle de 2π radians.

Dans le cas des angles orientés, il est important de tenir compte du signe (positif ou négatif) de l'angle selon le sens dans lequel on tourne autour du sommet commun aux demi-droites.

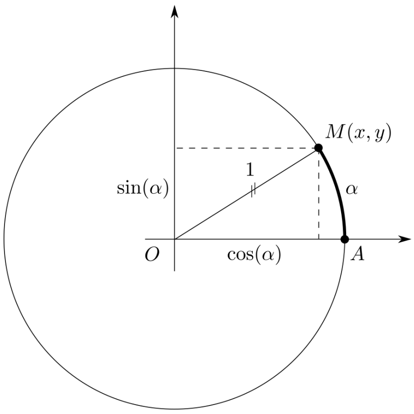
La convention dans le plan est la suivante : le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ainsi, dans le cas de la figure ci-dessus, la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ est positive, alors que

$$\widehat{BMA} = -\widehat{AMB} < 0 \,.$$

(c) Fonctions cosinus et sinus – On considère le cercle unité tracé dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On place le point $A(1,0)$, et on considère un point $M(x,y)$ quelconque sur le cercle.

On denote par α l'angle $\widehat{AOM}$ dont la mesure est exprimée en radians.

Définition – Le cosinus de l'angle α est l'abcisse x du point M, alors que le sinus de l'angle est l'ordonnée y.



Angles remarquables à connaître :

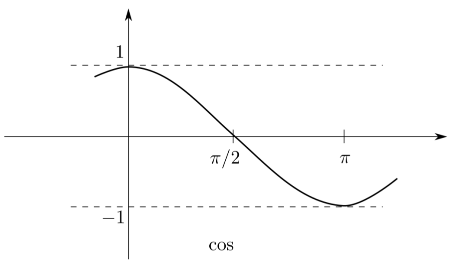
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

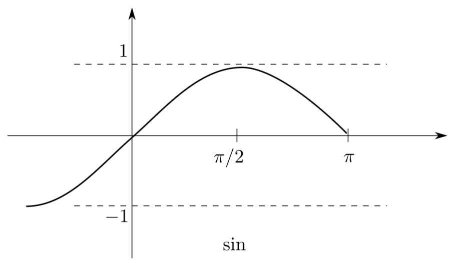
De par la construction de ces fonctions, on voit clairement que la fonction cos est paire, 2π-ériodique, définie sur $\mathbb{R}$. De même la fonction sin est impaire, 2π-périodique et définie sur $\mathbb{R}$.

On admet les formules de dérivation suivantes :

$$\cos'(x) = -\sin(x)\,, \qquad \sin'(x) = \cos(x)\,,$$

qui permettent d'en déduire les tableaux de variations de ces fonctions, à partir du signe de ces fonctions trigonométriques. Par exemple, la fonction cos est décroissante sur $[0,\pi]$ puis croissante sur $[\pi, 2\pi]$, cf. figure ci-dessous.





(d) Fonction tangente – La fonction tangente, notée tan peut être définie soit géométriquement, soit en utilisant directement la formule

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

C'est donc une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, qui est impaire et π-périodique. On peut donc l'étudier sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, et en utilisant les dérivées des fonctions cosinus et sinus, on obtient

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x) > 0\,.$$

Ainsi, la fonction tangente est croissante strictement et ses limites aux bornes sont $-\infty$ en $-\frac{\pi}{2}$, et $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$.

(e) Formules de trigonométrie – La première formule à retenir est fondamentale, il s'agit d'une application du théorème de Pythagore :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,.$$

On a ensuite deux formules pour des sommes d'angles :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{aligned}$$

On en déduit en particulier que

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= 2\cos^2 x - 1 \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

(f) Retour sur le produit scalaire – Il existe une autre façon de calculer le produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})\,,$$

où l'angle $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$ est définir en positionnant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à partir d'une origine commune (voir dessin ci-dessous)