Suites numériques – Partie 2

(a) Suites arithmétiques et géométriques – Il s'agit d'une catégorie importante de suites ayant des propriétés particulières.

– Une suite est dite *arithmétique* si elle vérifie la relation de récurrence additive suivante : $u_{n+1} = u_n + r$, où $r \in \mathbb{R}$ est un paramètres appelé *raison* de la suite. On peut alors démontrer (par récurrence immédiate) que la suite prend la forme $u_n = u_0 + r \times n$.

– Une suite est dite *géométrique* si elle vérifie la relation de récurrence multiplicative suivante : $u_{n+1} = q \times u_n$ où $q \in \mathbb{R}$ est un paramètre appelé *raison* de la suite. Dans ce cas on démontre également par récurrence immédiate que $u_n = u_0 \times q^n$.

– Les suites *arithmético-géométriques* sont une généralisation des deux concepts précédents, où la relation de récurrence est donnée par :

$$u_{n+1} = qu_n + r\,.$$

Dans ce cas, l'étude se ramène à celle d'une suite géométrique en posant $v_n := u_n - a$ où a est la solution de l'équation $a = qa + r$. En effet, $v_{n+1} = u_{n+1} - a = qu_n + r - a = q(u_n - a) + qa + r - a = qv_n$.

(b) Suites monotones – Une suite est dite monotone si elle est croissante ou décroissante (disons à partir d'un certain rang). Il s'agit d'un exemple important de suites pour lesquelles on a un résultat fondamental :

Théorème – Soit (u_n) une suite croissante (apdcr). Si (u_n) est majorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.

On a de même une version similaires pour le cas des suites décroissantes (selon qu'elles sont minorées ou non).

Attention – il n'est pas vrai qu'une suite seulement bornée est convergente, ça n'est pas une propriété suffisante : il faut avoir de la monotonie en plus. On le voit sur l'exemple classique $u_n = (-1)^n$ qui est bornée mais n'a pas de limite.

Ce théorème est admis car sa démonstration repose sur la construction de l'ensemble des nombres réels. Mais on peut néanmoins le comprendre de façon intuitive, et voir que dans le cas d'une suite croisante (par exemple), la limite est obtenue en prenant le plus petit des majorants de la suite (ce concept porte un nom, il s'agit de la *borne supérieure* – cf. L1).

(c) Suites adjacentes – Il s'agit d'une application très intéressante de la notion de suite monotone.

Définition – on dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si elles vérifient les deux propriétés suivantes :
(i) l'une est croissante, l'autre décroissante
(ii) $w_n := u_n - v_n$ tend vers zéro.

Exemple : $u_n = 1 + 1/n$ et $v_n = 1 - 1/n^2$.

Théorème – Si (u_n) est $v(v_n)$ sont adjacentes, alors elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite.

Preuve – On va supposer par exemple que (u_n) est la suite décroissante, et (v_n) la suite croissante, le raisonnement se faisant exactement de la même façon si on est dans le cas inverse.

1. On remarque déjà que $w_n = u_n - v_n$ est décroissante. Comme elle tend vers zéro, elle vérifie donc $w_n \geq 0$, ce qui entraîne que $u_n \geq v_n$ pour tout n.

2. On en déduit que $u_0 \geq u_n \geq v_n \geq v_0$, et donc (u_n) est décroissante minorée, alors que (v_n) est croissante et majorée. Ces deux suites sont donc convergentes.

3. Puisque $\lim(u_n - v_n) = 0$, on en déduit que la limite des deux suites est la même.

Exemple typique d'application : $u_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ et $v_n = u_n + 1/n$ dont la limite commune est $\ell = e$.

(d) Suites récurrentes d'ordre 1 – Autre cas particulièrement intéressant de suites numériques. Il s'agit de suites qui sont déterminées par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}\,, \\ u_{n+1} = f(u_n)\,, \end{cases}$$

où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

On ne va pas ici faire toute la théorie des suites récurrentes, ni faire les démonstrations en détail mais juste mentionner quelques points fondamentaux :

1. Si la suite converge, alors en notant ℓ sa limite on voit que ℓ est un *point fixe* de la fonction f, c'est-à-dire $\ell = f(\ell)$. Cela permet d'identifier les limites éventuelles en résolvant cette équation.

2. Si la fonction f est croissante, alors on démontre facilement par récurrence que la suite (u_n) est monotone. Et pour savoir si elle est croissante ou décroissante, on compare les deux premiers termes u_0 et u_1.

3. Une fois qu'on a une suite monotone, il suffit d'avoir des bornes (majorant ou minorant) pour conclure que la suite est convergente. Le point fixe permet en général d'avoir une de ces bornes. Mais il faut que ce soit la bonne (si (u_n) est croissante, il faut la majorer, pas la minorer...).

En conclusion, si la fonction f est croissante, on voit que soit la suite (u_n) converge vers un point fixe de f, soit elle tend vers ∞.

Le cas où la fonction f est décroissante est sensiblement plus compliqué, il faut considérer les suites de rang pair et impair séparément, cf. L1.