Parcours RMLQA — Année 2018-2019
Université de Tours

Ensembles et Applications

(a) Notion d'ensemble – en mathématiques, un *ensemble* est un objet abstrait représentant une collection d'objets distincts, appelés les *éléments* de l'ensemble.

Exemples : l'ensemble constitué des nombres à virgule, l'ensemble des angles, l'ensemble des fruits, l'ensemble des voitures rourges de moins de cinq ans.

Souvent, on le voit, les éléments partagent certaines caractéristiques même s'ils sont distincts les uns des autres. Un ensemble est donc une façon de regrouper les éléments de façon structurée. Cependant, il est tout à fait possible de considérer des ensembles dont les éléments n'ont aucun autre point commun que d'appartenir au même ensemble.

Par exemple, on peut considérer l'ensemble constitué d'une voiture rouge, d'une pomme verte, de $\sqrt{2}$ et de Donald Trump.

Les ensembles peuvent être finis, c'est-à-dire posséder un nombre fini d'éléments, ou infinis (par exemple : les entiers naturels, les nombres premiers, les nombres réels). Parmi ces infinis, il y a des infinis de "taille" diverses mais cela dépasse le cadre de ce cours.

Dans le cas d'un ensemble fini E, on dénote par $\operatorname{Card} E$ le cardinal de E, c'est-à-dire son nombre d'éléments.

(b) Notations – On désigne par E un ensemble quelconque. Quand E est fini, on peut écrire tous ses éléments et la notation consiste à les énumérer entre accolades. Exemple :

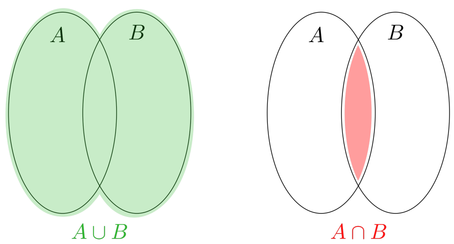
$$E = \{a, b, c, \sqrt{2}, voiture\}$$

Si x est un élément de E, on écrit $x \in E$ qui se lit "x appartient à E". Dans le cas ci-dessus : $a \in E$. On a également $voiture \in E$. Pour dire qu'un élément n'est pas dans l'ensemble on utilise le symbole $\notin$, par exemple $z \notin E$.

(c) Inclusion, Complémentaire, Union, intersection – On dit qu'un ensemble A est inclus dans un autre ensemble B, et on note $A \subset B$ si tout élément de A est également un élément de B. Evidemment, cette inclusion peut être stricte, par exemple $[0,1] \subset [-1,2]$.

Si $A \subset E$, on appelle *complémentaire* de A dans E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. On note généralement cet ensemble $\complement_E A$ ou plus simplement A^c s'il n'y a pas d'ambiguité sur l'ensemble de référence E.

L'union de deux ensembles A et B est un ensemble noté $A \cup B$, obtenu en regroupant tous les éléments de A et tous les éléments de B. L'intersection de A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.



N.B. Pour démontrer que deux ensembles sont égaux, on a souvent recours à une double-inclusion : on montre que $A \subset B$, puis que $B \subset A$.

(d) Quantificateurs – L'utilisation des quantificateurs est fondamentale en langage mathématique, qui permettent de quantifier pour quels éléments d'un ensemble une certaine propriété est vraie.

1. Le quantificateur *il existe* est noté $\exists$. Il signifie qu'une propriété est vraie pour au moins un élément donné, mais a priori pas nécessairement pour tous les éléments.

Exemple : la phrase mathématique "$\exists x \in E,\ x > 0$" signifie qu'il existe au moins un élément x dans E tel que x est strictement positif.

2. Le quantificateur *quelque soit* est noté $\forall$. Il signifie qu'une certaine propriété est vraie quelque soit l'élément de E (on dit aussi "pour tout élément de E").

Exemple : la phrase mathématique "$\forall y \in E,\ y/2 \in \mathbb{N}$" signifie que pour tout y de E, y divisé par deux est un entier positif. E est donc constitué d'entiers pairs.

(e) Applications – le concept d'application est fondamental en mathématiques, il est d'un certain point de vue plus précis que celui de fonction et le généralise :

Définition – Une application est la donnée de trois objets (f, E, F) où E et F sont deux ensembles, et f est une correspondance qui à tout élément x de E fait correspondre un unique élément $y = f(x)$ de F. On note également $f : E \to F$.

A la différence d'une fonction, une application est toujours définie sur E. En particulier si f est une fonction, alors $(f, \mathcal{D}_f, \mathbb{R})$ est une application.

Une application peut être un objet très général, pas seulement restreint à une variable réelle. Par exemple on peut faire correspondre un un ensemble de voiture leur couleur.

Il est fondamental de comprendre qu'une application n'est pas la donnée de f, mais bien du triplet (f, E, F) car si on change n'importe lequel de ces éléments, on change les propriétés de l'application comme nous allons le voir ci-dessous.

(f) injection, surjection, bijection – Si on représente une application comme une collection de flèches allant de E vers F, ces notions qualifient la façon donc les flèches se répartissent. Plus précisément :

Définition – on dit que (f, E, F) est une *injection* si deux éléments distincts x_1 et x_2 de E ont des images différentes dans F.

On dit que (f, E, F) est une *surjection* si pour tout élément de F il existe au moins un antécédent $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On dit que (f, E, F) est une bijection si c'est à la fois une injection et une surjection.

Exemple typique : Soit $f(x) = x^2$. Alors $(f, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ est bijective, mais $(f, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est ni injective, ni surjective.

Proposition – Soient E et F deux ensembles finis. Alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ si et seulement si il existe une bijection de E dans F.

On a de même des résultats assez naturel pour les injections et les surjections : il existe une injection de E dans F si et seulement si $\operatorname{Card} E \leq \operatorname{Card} F$, et une surjection si et seulement si $\operatorname{Card} E \geq \operatorname{Card} F$.