Parcours RMLQA — Année 2018-2019
Université de Tours

Etudes de fonctions

(a) Notion de fonction numérique – on appelle fonction numérique de variable réelle, une correspondance qui à un réel associe au plus un autre réel. Si x représente la variable réelle de départ, on note alors $f(x)$ (quand ceci est défini) la variable associée par f.

Exemple : si à tout réel x on associe le résultat du calcul de $3x^2-1$, on définit alors une fonction f donnée par $f(x) = 3x^2-1$. Dans le cas particulier $x = 1$, on a par exemple $f(1) = 2$.

Important – on a bien précisé qu'à tout réel x, on associe **au plus** un élément noté $f(x)$. Cela a deux conséquences : d'une part une fonction numérique ne peut prendre deux valeurs distinctes au même point ; d'autre part, $f(x)$ n'est pas nécessairement défini partout.

Définition – Si f est une fonction numérique, on note $\mathcal{D}_f$ son *ensemble de définition*, c'est-à-dire l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est bien défini.

Exemple : en posant $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ on définit une fonction f pour laquelle $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

N.B. – nous verrons plus tard un autre concept proche, celui d'*application*, qui généralise celui de fonction tout en le précisant.

(b) Plan pour une étude de fonction – faire une étude de fonction passe par plusieurs étapes. S'il n'y a pas de méthode "officielle" ou "standard", une étude de fonction doit cependant prendre en compte en compte l'ensemble des points suivants :

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les symmétries possibles et la périodicité de f afin de réduire l'intervalle d'étude.
3. Calculer la dérivée f' et déterminer son signe pour commencer à constuire le tableau de variations

4. Déterminer les limites aux bornes et certaines valeurs particulières de f (maxima, minima,...).
5. Etudes complémentaires éventuelles à considérer : calcul de tangentes, déterminer des asymptotes, convexité, étude locale.
6. Faire la représentation graphique à l'aide des renseignements précédents.

(c) Notion de limite – qu'il s'agisse de déterminer le comportement d'une fonction près d'un point (ou en l'infini), de calculer sa dérivée ou encore de déterminer une asymptote, tout ceci utilise un concept fondamental en analyse, celui de *limite*. On peut avoir une notion intuitive de la limite : par exemple que si x tend vers l'infini, alors on comprend bien que $1/x$ tend vers zéro. Néanmoins, afin de prouver des résultats plus élaborés il nous faut une définition mathématiquement utilisable de la limite.

Pour simplifier, ici nous allons nous restreidre au cas où x tends vers $+\infty$ mais les concepts de limites en un point sont similaires.

Definition – on dit que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M\,.$$

Ainsi, dire qu'une fonction f tend vers $+\infty$ signifie que si on se fixe une valeur M (a priori grande), il suffit de prendre x assez grand (plus grand que A) pour s'assurer que la valeur $f(x)$ dépasse M.

Il faut bien noter, dans cette définition, que A dépend évidemment de M. En pratique, plus M est grand, plus A doit être grand également. Pour cette raison, on note parfois A_M pour bien préciser que A dépend de M.

Exemple : pour démontrer que la fonction $f(x) = x^3$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on fixe $M > 0$ quelconque. On cherche à quelle condition sur x on a $f(x) \geq M$. Cela conduit à résoudre l'inéquation

$$x^3 \geq M \Leftrightarrow x \geq M^{1/3}\,.$$

Ainsi, en choisissant $A_M := M^{1/3}$ on s'assure que si $x \geq A_M$, alors $f(x) \geq M$. Conclusion : la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Definition – on dit que la fonction f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \epsilon\,.$$

Remarques : ici, ϵ est un réel positif strictement mais a priori petit, contrairement au paramètre M de la définition précédente. Par ailleurs, on utilise la valeur absolue de f pour contrôler les changements de signes possible. L'inégalité $|f(x)| \leq \epsilon$ est bien évidemment équivalente à $-\epsilon \leq f(x) \leq \epsilon$. On peut noter A_ϵ en référence au fait que, étant donné $\epsilon > 0$, le réel A dépend de ϵ.

Exemple : pour démontrer que la fonction $f(x) = 1/x$ tend vers 0 en $+\infty$, on fixe un $\epsilon > 0$ et on cherche à quelle condition $|f(x)| \leq \epsilon$. Etant donné que x tend vers $+\infty$, on peut évidemment le supposer positif ce qui permet d'enlever les valeur absolues et on se ramène donc à résoudre l'inéquation $1/x \leq \epsilon$, qui est équivalente à $x \geq 1/\epsilon$. Il suffit alors de poser $A_\epsilon := 1/\epsilon$ pour que la définition soit vérifiée.

Autres limites – dire qu'une fonction f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ autre que $\ell = 0$ est équivalent à dire que la fonction $g(x) := f(x) - \ell$ tend vers 0. Il suffit donc de remplacer $|f(x)|$ par $|f(x) - \ell|$ dans la définition ci-dessus.

Notations – si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, on note

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell\,.$$

Remarque – quand $f(x) \to 0$, il peut être important pour diverses raisons de savoir si f tend vers 0 par valeurs positives, ou négatives. Quand c'est le cas, on note sa limte 0^+ ou 0^-. En général, les fonctions changent de signe et donc on note juste 0. Par exemple, $\lim 1/x^2 = 0^+$ mais $\lim(-1/x) = 0^-$.

Ceci est particulièrement important lorsqu'il faut diviser par une limite nulle, voir plus loin.

(d) Calculs de limites – pour un certain nombre de fonctions simples, de référence, on peut calculer leur limite à l'aide de la définition en déterminant explicitement le réel A à chaque fois, comme sur les exemples. On obtient donc aisément les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \quad x,\ x^2,\ x^3,\ \sqrt{x},\ \ln x,\ e^x = +\infty \\
&\lim_{x\to\infty} \quad \frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2},\ \frac{1}{\sqrt{x}},\ \frac{1}{\ln x},\ e^{-x} = 0
\end{aligned}$$

Pour des limites plus compliquées, on ne peut pas toujours calculer explicitement A en fonction de M ou ϵ. C'est le cas par exemple, pour la fonction

$f(x) = xe^{-x} - \ln(x^2) + 2x$. Dans ce cas il faut utiliser des résultats permettant de se ramener à des limites de référence par addition, multiplication etc. :

Proposition – Si $\lim f(x) = \ell_1$ et $\lim g(x) = \ell_2$, alors

$$\lim f(x) + g(x) = \ell_1 + \ell_2\,,\ \lim f(x)g(x) = \ell_1\ell_2\,,\ \text{si } \ell_2 \neq 0\,,\ \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\,.$$

Pour démontrer ces résultats, on utilise la définition de limite pour chacune des deux fonctions et on les combine en démontrant qu'il existe bien un réel A_ϵ permettant de traiter $f + g$, par exemple.

Dans le cas des limites infinies, on a des résultats similaires assez naturels, mais il faut faire attention aux signes, pour distinguer $+\infty$ et $-\infty$.

(e) Formes indéterminées – on appelle forme indéterminée (F.I.) une expression dans laquelle le calcul de la limite n'apparait pas comme relevant des propriétés vues ci-dessus. Soit par exemple

$$f(x) = \frac{x+1}{3x^2+2}\,.$$

On voit aisément que le numérateur, mais aussi le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, on est donc dans un cas où le résultat n'est pas clair a priori, il s'agit d'une F.I. de type "$\frac{\infty}{\infty}$". Pour lever l'indétermination, il existe quelques méthodes dont l'une des plus utilisées consiste à mettre en facteur les termes dominants et à simplifier le résultat :

$$f(x) = \frac{x(1+1/x)}{x^2(3+2/x^2)} = \frac{1}{x} \times \frac{1+1/x}{3+2/x^2}\,.$$

Par application de la proposition vue plus haut, la seconde fraction a pour limite $1/3$ alors que $1/x$ tend vers 0. En appliquant la règle de multiplication des limites, on obtient que $\lim f(x) = 0$.

Les formes indéterminées sont les suivantes :

$$\frac{\infty}{\infty}\,,\ \frac{0}{0}\,,\ 0\times\infty\,,\ \infty - \infty\,,\ 0^0$$

Les autres formes faisant intervenir 0 et ∞ ne sont pas indéterminées, par exemple "$+\infty - 0 = +\infty$", "$\frac{1}{0^-} = -\infty$" etc.

(f) Croissances comparées – il s'agit d'un autre outil permettant (entre autres choses) de de lever l'indétermination dans le cas de F.I.

Définition – soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$. On suppose que $\lim f = \lim g = +\infty$ quand $x \to +\infty$. On dit que f croît plus vite que g en $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty\,.$$

On note dans ce cas $f \gg g$, ou de façon équivalente $g \ll f$, et on dit également que g est négligeable devant f en $+\infty$.

Remarque : comme $\lim g = +\infty$, il est clair de par la définition de cette limite que $g(x)$ ne s'annule pas pour x assez grand (pour un tel x on a $g(x) \geq 1$ par exemple). Donc le quotient f/g est bien défini.

Par ailleurs, $f/g \to +\infty$ est équivalent à $g/f \to 0$.

Exemple : il est très facile de démontrer que $x^3 \gg x^2$ puisque le quotient x^3/x^2 se simplifie, il faut x. en revanche, il est plus difficile de montrer que $\ln x \ll \sqrt{x}$, par exemple (voir les exercices).

Les principales croissances comparées sont les suivantes :

$$\ln x \ll \sqrt{x} \ll x \ll x^2 \ll x^3 \ll e^x \ll e^{x^2}\,.$$

Lorsque f et g tendent toutes les deux vers zéro (sans s'annuler), on peut également comparer la vitesse avec laquelle elles tendent vers 0 de la même façon, en regardant f/g. Si $f/g \to 0$, alors f tend vers zéro plus vite que g, et on note $f \ll g$: f est négligeable devant g en $+\infty$. Par exemple, $1/x^2 \ll 1/x$ en $+\infty$.

(g) Limites en d'autres points – nous n'avons vu pour le moment que les limites lorque x tend vers $+\infty$. On comprend assez facilement comment on peut modifier les définitions lorsque $x \to -\infty$. Par exemple :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty : \forall M < 0,\ \exists A < 0,\ x \leq A \Rightarrow f(x) \leq M\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell : \forall \epsilon > 0,\ \exists A < 0,\ x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon\,.$$

Lorsqu'on veut calculer une limite quand x tend vers un point x_0, l'idée reste similaire mais il faut préciser qu'on est "proche" de x_0. Par exemple :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell : \forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon\,.$$

Evidemment, on peut aussi distinguer les cas où l'on tend vers x_0 par valeurs inférieures ou supérieures.

On peut également composer les limites : si $g(x)$ tend vers ℓ quand $x \to \infty$, alors pour calculer la limite de $h(x) = f(g(x))$ il faut prendre la limite de $f(y)$ quand $y \to \ell$. Exemple : si $h(x) = e^{-x/(\sqrt{x}+1)}$, alors quand $x \to +\infty$, puisque $-x/(\sqrt{x}+1) = -\infty$, on obtient $\lim h(x) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$.

(h) Asymptotes – il y a trois types d'asymptotes : verticales, horizontales et obliques. Une asymptote désigne une droite le long de laquelle la courbe représentative d'une fonction s'approche lorsque x tend vers $\pm\infty$ ou un point x_0.

Définition – on dit que la fonction f admet une asymptote *verticale* en $x = x_0^-$ si $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$. L'asymptote est la droite $x = x_0$.

On a évidemment la même définition en x_0^+. Exemple : $f(x) = -1/x$ admet une asymptote verticale en 0^- puisque $\lim_{x\to 0^-}(1/x) = -\infty$. De même en 0^+, la limite est dans ce cas $+\infty$.

Définition – on dit que la fonction f admet une asymptote *horizontale* en $+\infty$ si il existe une constante $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. La droite asymptote est : $y = \ell$.

On définit de même une asymptote horizontale en $-\infty$, qui n'ont pas de raison d'être les mêmes. Exemple : $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$ admet $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$, mais $y = -1$ comme asymptote horizontale en $-\infty$.

Définition – on dit plus généralement que la droite d'équation $y = ax + b$ est *asymptote oblique* à la courbe représentative de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0\,.$$

En pratique, étant donné f on commence à déterminer le coefficient a en regardant la limite de $f(x)/x$ si elle existe. Si c'est le cas, on détermine ensuite $b := \lim(f(x) - ax)$ si cette limite existe. Si la limite b n'existe pas, alors on parle seulement de *direction asymptotique* pour $y = ax$.

Exemple : $f(x) = \frac{2x^2}{x+3}$ admet la droite d'équation $y = 2x - 6$ pour asymptote oblique ; $g(x) = 3x + \sqrt{x}$ admet seulement une direction asymptotique $y = 3x$. ensuite

(i) Dérivées – comme beaucoup d'autres concepts d'analyse, la notion de dérivée repose sur un calcul de limite. La définition précise est la suivante :

Définition – Soit f une fonction définie (au moins) sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite suivante existe, et c'est un réel :

$$\lim_{h \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Lorsque cette limite existe on la note $f'(x_0)$, c'est le nombre dérivé en x_0. Quand x_0 varie, on crée donc une fonction f', la dérivée de f.

Calculer la fonction f' est faisable à partir de la limite pour des fonctions de référence, assez simple. Par exemple, il est assez facile à partir de la définition de démontrer que si $f(x) = x^2$, alors f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et que la dérivée est donnée par $f'(x) = 2x$.

Les dérivées des fonctions de référence sont les suivantes (ci-dessous, $\alpha \in \mathbb{R}$) : $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = 1/x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$.

Pour des cas plus compliqués on décompose en différentes fonctions de références, en utilisant la proposition suivante :

Proposition – si f et g sont dérivable en x_0 et λ est un réel, alors :
(i) $f + \lambda g$ est dérivable au point x_0 et $(f + \lambda g)'(x_0) = f'(x_0) + \lambda g'(x_0)$.
(ii) fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
(iii) si $g(x_0) \neq 0$, alors f/g est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} .$$

Il reste une dernière formule qui concerne la composée de deux fonctions :

Proposition – on suppose que g est dérivable en x_0 et que f est dérivable en $g(x_0)$. Alors la fonction $h(x) := f(g(x))$ est dérivable en x_0 et

$$h'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) .$$

Ce dernier resultat fournit de nombreuses applications, par exemple si u est une fonction, $(e^{u(x)})' = e^{u(x)}u'(x)$.