RMLQA - EXERCICES du 30/11/2018 et du 03/12/2018

« LES SUITES NUMERIQUES »

EXERCICE N°1 – Les limites de suites par le terme dominant

Dans chacun des cas, déterminer les limites des suites (u_n) en utilisant la méthode du terme dominant.

$$u_n = \frac{2n+1}{n+325}$$

$$u_n = \frac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{2n^2-3n+2}{1-n}$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}}$$

$$u_n = \frac{4n^2+1}{n(2n+1)}$$

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$u_n = \frac{3}{2\sqrt{n}+17}$$

$$u_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

EXERCICE N°2 – Les limites de suites par un théorème de comparaison

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{n+1}{2n+\sin(n)}$$

a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $1/2 < u_n$
b) Démontrer qu'à partir d'un certain rang on a $u_n < 1/2 + 1/n$
c) Justifier que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3n-1}{n+1}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, $-1 \leq u_n \leq 3$

b) Que peut-on en déduire ?

c) Etudier le sens de variation de u_n.

d) Démontrer que pour n suffisamment grand on a : $u_n > 2{,}999$

e) Que peut-on en conjecturer ?

EXERCICE N°3 – Les limites de suites par le théorème des gendarmes

Pour chacune des suites déterminer par la théorème des gendarmes leurs limites.

$$u_n = \frac{\cos(n)}{n+1} \qquad\qquad u_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2+1}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2}$$

EXERCICE N°4 – Etude d'une suite

Soit S_n la somme des nombres entiers de 1 à n tel que :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Soit C_n la somme des cubes des nombres entiers de 1 à n tel que :

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

1) Calculer S_n et C_n lorsque n=1, 2, 3, 4, 5. Que pouvons-nous conjecturer ?

2) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

EXERCICE N°5 – Etude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et, pour tout entier n, $3u_{n+1}=u_n+4$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Démontrer que, pour tout entier n, $u_n \geq 2$.

3) Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

4) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) On pose pour tout entier n, $v_n = u_n - 2$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

6) Soit les deux suites :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad\qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Déterminer l'expression de S_n et de T_n en fonction de n.

7) Déterminer les limites des deux suites ci-dessus.