Le calcul littéral

Le calcul *littéral* manipule des expression dites *littérales*, ce qui signifie qu'elles ne contiennent pas seulement des chiffres, des données numériques, mais également des lettres (ou plus généralement des symboles) pouvant représenter des constantes, des indéterminées ou des variables.

Exemple : $A = (a+2)^2$ est une expression littérale. La lettre a peut représenter une quantité quelconque, nombre entier, réel, constante etc.

Faire un calcul littéral consiste donc à développer, simplifier, factoriser etc. des expressions contenant des lettres, et symboles abstraits.

Inconnues, variables, constantes — les lettres ou symboles intervenant dans les expression littérales peuvent être de trois natures distinctes même si cela ne fait pas de différence dans le traitement de l'expression.

(a) Les *constantes* sont des objets qui ne changent pas au cours du calcul ou de l'exercice. Par exemple, en physique on a l'habitude de représenter par g l'accélération de la pesanteur sur la Terre. Cette constante a une valeur numérique de l'ordre de $9.8ms^{-2}$, mais on garde le symbole g pour faire les calculs, en le remplaçant par sa valeur numérique seulement lorsqu'on veut évaluer le résultat. C'est une constante, mais elle peut prendre une valeur différente si on se place sur une autre planète, par exemple. Lorsqu'on écrit une équation

$$P = mg$$

en physique, on fait intervenir la masse m, la constante g et le poids P. Et si on cherche la valeur de P pour une masse de $2kg$, on obtient $P = 2g$.

(b) Une *variable* est un symbole représentant, comme son nom l'indique, une quantité qui varie. On l'utilise par exemple pour écrire une fonction (nous verrons ce concept plus tard plus en détail). Par exemple, si on considère la fonction "cube", multiplée par 2, retranchée de 6, on notera $f(x) = 2x^3 - 6$: la fonction f est la fonction qui, lorsqu'on lui donne une entrée x, la transforme en son cube puis multiplie par deux avant de retrancher 6, c'est-à-dire $2x^3 - 6$.

Au cours d'un exercice on peut par exemple chercher à évaluer ce que fait la fonction f si on lui donne en entrée la valeur 2 et on fait donc le calcul en remplaçant ou "substituant" la valeur numérique 1 à la place de la variable x :

$$f(1) = 2 \times (1)^3 - 6 = -4\,.$$

(c) Une *inconnue* est une valeur qui n'est pas déterminée, on parle aussi donc *d'indéterminée*, mais dans le cas d'une inconnnue le but est de trouver un moyen de la calculer (ou la déterminer). On utilise donc des inconnues dans les équations par exemple : si on cherche à trouver tous les entiers positifs tels que, élevés au carré puis multipliés par deux on obtient 32, on posera alors une équation à l'aide d'une inconnue n :

$$2 \times n^2 = 32\,.$$

A l'aide d'un calcul littéral, en divisant par deux on obtient $n^2 = 16$ puis $n = 4$. On a donc réussi à déterminer toutes les valeurs possibles qui satisfont au problème. Le symbole n est donc ici un intermédiaire de calcul pour trouver la solution au problème.

Evidemment, on peut avoir dans une même expression plusieurs symboles. Si on cherche le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h, la formule est donnée par

$$V = \pi r^2 \times h\,.$$

Ici, π est une constante (qui vaut environ 3.14), r et h sont des variables ainsi que V qui est le résultat du calcul.

Développer, factoriser, simplifier – il s'agit des trois méthodes fondamentales du calcul littéral, qui permettent de mettre l'expression littérale sous une autre forme. Le but est de la mettre sous une forme utile en fonction de l'objectif (résoudre une équation, simplifier un calcul).

(a) *Simplifier* une expression littérale a pour but de lui donner la forme la plus cohérente et la plus simple possible. Nous avons déjà vu qu'on réduit les fraction : si $x = 4/12$, on préfèrera l'écrire sous la forme $1/3$, qui est complètement équivalente mais plus lisible. De la même façon, on préfère ne pas avoir de signe moins ni de racines carrées au dénominateur (en utilisant par exemple l'expression conjuguée pour simplifier la fraction). Autre exemple : on considère la fonction polynôme suivante :

$$f(x) = 2x - 2 - 3x^2 + x - 6 + 12x^3 \,.$$

La simplification consiste d'une part à réunir les termes de même puissance ensemble, d'autre part à ordonner le polynôme par puissances décroissantes :

$$f(x) = 12x^3 - 3x^2 + 3x + 10 \,.$$

Il n'y a pas de méthode globale, à coup sur. Il s'agit de faire en sorte d'obtenir le résultat sous la forme d'une expression la plus simple possible, en utilisant le bon sens.

(b) *Développer* une expression littérale consiste à supprimer toute parenthèse, tout facteur. Pour cela on utilise essentiellement la distributivité entre la multiplication et l'addition :

$$(2 + x)(3 - x) = 6 - 2x + 3x - x^2$$

et on procèdera ensuite à une simplification comme ci-dessus. On utilise aussi les identités remarquables du type $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ etc. qui sont en réalité obtenues elles-même à partir d'un développement/simplification.

(c) La *factorisation* est l'opération inverse du développement, on retrouvera donc les mêmes techniques, mais vues sous un autre angle. Exemple :

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \,.$$

L'intérêt de la factorisation est d'une part d'avoir une expression plus condensée, mais également de pouvoir résoudre des équations : on utilise qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Par exemple, pour résoudre l'équation $x^2 - 4x = 0$, en remarquant que $x^2 - 4x = x(x - 4)$ on se ramène à résoudre une équation équivalente :

$$x(x - 4) = 0 \,,$$

qui n'a que deux solutions : $x = 0$ et $x = 4$.

L'objectif du calcul littéral est donc d'être en mesure de transformer les expressions littérales sous des formes variées, toujours équivalentes mais qui permettent de les utiliser de façon plus simple selon le contexte.