L1S2 INFORMATIQUE — UNIVERSITÉ DE TOURS
Notes de Cours 2018-2019
Emmanuel Chasseigne

COURS NUMÉRO 6 — *Etudes de fonctions*

(a) Tableau de variations (TV) — passage obligé pour toute étude de fonction, il condense la plupart des informations fondamentales avant d'aller plus loin. La méthode pour le bâtir est la suivante:

1. Déterminer l'ensemble de définition, $\mathcal{D}_f$ puis éventuellement l'ensemble d'étude en regardant les symmétries ou la périodicité éventuelles de f. Cela donne la première ligne du TV, où on place la variable x.

3. Calculer la dérivée f' (attention à l'ensemble des points où f est dérivable).

4. Déterminer le signe de f' et le placer dans le TV.

5. Placer une ligne représentant les variations de f.

6. Calculer les valeurs particulières de f (extrema, zéros...)

7. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$ et les placer dans le TV.

8. Vérifier la cohérence des informations (valeurs/limites/variations).

Exemple — Dresser le tableau de variations de la fonction $f_0(x) := xe^{-x^2}$.

(b) Tangente — Afin de mieux représenter la fonction graphiquement, on peut avoir besoin de faire une étude plus précise au moins en certains point en calculant la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en un point x_0.
Rappel: T_{x_0} a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exemple — pour la fonction f_0 déterminer la tangente en $x_0 = 0$.

N.B. dans le cas d'un extremum on a une tangente horizontale, mais on peut avoir une tangente horizontale sans extremum (par exemple, $f(x) = x^3$ en $x = 0$). On peut parfois aussi être ammené à un faire un DL pour aller encore plus loin.

(c) Asymptotes — on trouve trois types d'asymptotes:

1. L'asymptote verticale, lorsque $|f(x)| \to +\infty$ lorsque x tend vers un certain $x_0 \in \mathbb{R}$. On la repère normalement facilement dans le TV, il y a une double barre en x_0.

2. L'asymptote horizontale, lorsque $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to \infty$ ou $-\infty$. On dit que $y = \ell$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (ou $-\infty$ selon le cas). On peut avoir deux asymptotes différentes en $+\infty$ et $-\infty$.

3. L'asymptote oblique, lorsque $f(x)$ se rapproche d'une droite lorsque $x \to +\infty$ (ou $-\infty$). Pour la déterminer, on commence par calculer une éventuelle direction asymptotique,

$$a := \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}\,.$$

Si cette limite existe dans $\mathbb{R}$, on dit que $y = ax$ est direction asymptotique en l'infini. Dans ce cas, on peut alors voir si la limite suivante existe:

$$b := \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax\,.$$

Si $b \in \mathbb{R}$, alors on dit que la droite $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ lorsque x tend vers l'infini.

Exemple — déterminer les asymptotes de f_0, puis celles de la fonction $g(x) = \frac{2x^2+1}{x-2}$.

(d) Convexité — il s'agit d'un renseignement facile à obtenir et important pour la représentation graphique. Il y a plusieurs définitions possibles de la convexité mais pour ce dont nous avons besoin ici, en voici une qui est très simple:

Définition — On dit que f est convexe sur I si $f'' \geq 0$ sur I. On dit que f est concave sur I si $f'' \leq 0$ sur I.

Typiquement, e^x et x^2 sont convexes sur $\mathbb{R}$ tout entier; $\sqrt{x}$, $\ln x$ sont concaves sur $]0, +\infty[$. Les fonctions cosinus et sinus alternent leur convexité selon les intervalles. Pour une fonction convexe, la pente de la tangente est croissante. On peut démontrer que f est donc toujours au-dessus de sa tangente et en dessous de ses cordes.

Exemple — Déterminer sur quels intervalles la fonction f_0 est convexe/concave.

(e) Représentation graphique —

Il s'agit de la dernière étape, qui donne une idée globale de tous les renseignements obtenus précédemment. Il s'agit donc de placer les asymptotes, les points particuliers, les limites, les tangentes éventuelles. Puis tracer f en respectant sa convexité.

Exemple — faire le tracé de la fonction f_0.