L1S2 Informatique — Université de Tours
Notes de Cours 2018-2019
Emmanuel Chasseigne

Cours Numéro 5 — *Développements limités*

(a) Polynôme de Taylor — le but est de créer un polynôme qui approche f raisonnablement au voisinage d'un point a.

Définition — Soit f définie et dérivable n fois au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. On appelle polynôme de Taylor d'ordre n de f au point a le polynôme suivant:

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n \,.$$

On appelle Reste d'ordre n la quantité $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$.

Le but est d'une part de calculer concrètement P_n pour approcher la fonction f par une fonction polynôme, plus simple à calculer, d'autre part d'estimer l'erreur que l'on commet en replaçant f par P_n.

Exemple: si $f(x) := e^x$, alors comme $f^{(n)}(x) = f(x) = e^x$, on a immédiatement la formule pour $a = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \,.$$

(b) Rappels sur les notations de Landau —

Définition — Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est négligeable devant g lorsque x tend vers a si il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. Dans ce cas, on note $f(x) = o(g(x))$.

Exemple: x^2 est négligeable devant x lorsque x tend vers 0, de même que $1/x = o(1/x^2)$ au même endroit.

On a évidemment une définition similaire lorsque $|x| \to \infty$. La notation $O(g(x))$ est utilisée lorsque la fonction ε est seulement bornée au voisinage de a, pas necessairement qu'elle tend vers 0. Par exemple, $\cos(1/x^2) = O(1)$ quand $x \to 0$.

Définition — Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a s'il existe un polynôme P_n tel que le reste R_n soit négligeable devant $(x-a)^n$, autrement dit

$$f(x) - P_n(x) = o\big((x-a)^n\big)\,.$$

Remarque: on peut toujours se ramener à faire un DL en $a = 0$ en considérant la fonction $g(x) := f(x+a)$. Pour cette raison, nous ne considérerons désormais que des DL en 0.

Proposition — Soit f une fonction définie au voisinage de 0. Si f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, alors ce DL est unique.

(c) Formules de Taylor —

Théorème — (Taylor-Young)
Soit f une fonction n fois dérivable au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$. Alors son reste de Taylor vérifie:

$$R_n(x) = o(x^n) \quad \text{quand } x \to 0\,.$$

Par conséquent, f admet un DL d'ordre n en zéro, donné par son polynôme de Taylor.

La preuve se fait par récurrence sur n en utilisant le TAF.

NB: on peut aussi exprimer le reste sous forme d'une intégrale.

(d) Opérations sur les DL — à partir des DL des fonctions de référence, on va en déduire de nombreux DL pour des fonctions plus complexes à l'aide des opérations suivantes:

Proposition — Soient f et g deux fonctions ayant des DL en 0 d'ordre n, donnés par des polynômes P_n et Q_n. Alors:
1. $f + g$ admet un DL d'ordre n donné par $P_n + Q_n$.
2. fg admet un DL d'ordre n donné par les termes de degré inférieur ou égal à n dans $P_n Q_n$.
3. Si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet un DL d'ordre n donc le polynôme est donné en prenant les termes de degré inférieur ou égal à n dans $P_n \circ Q_n$.
4. f' admet un DL d'ordre $n-1$ dont le polynôme est donné par P_n'.
5. toute primitive de f admet un DL d'ordre $n+1$ dont le polynôme est obtenu par primitivation de P_n.

Exemples: sh, ch, $ln(1+x)$, arctan, etc.