Université de Tours
Licence L1 de Mathématiques, Informatique, Physique, Chimie, Sciences de la vie - S1

Systèmes linéaires

Exercice 1 En appliquant la méthode du pivot de Gauss, résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 5y & = & 11 \\ 2x & + & 3y & = & 7 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 8 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & + & 15y & = & 30 \\ 4x & + & 6y & = & 16 \end{array}\right. .$$

$$\{2x - y = 10 \; ; \qquad \{x + y = 0 \; ; \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 4 \\ 3x & + & 7y & = & 0 \\ -x & + & y & = & 1 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 4 \\ 3x & + & 7y & = & 0 \\ -x & + & y & = & -8 \end{array}\right. .$$

Solution:

1. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(2,1)\}.$$
2. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(\frac{5}{2},1)\}.$$
3. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(\frac{5}{2},1)\}.$$
4. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(5 + y/2, y), y \in \mathbb{R}\}.$$
5. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(-y, y), y \in \mathbb{R}\}.$$
6. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(2 - y, y) \; y \in \mathbb{R}\}$$
7. Ce système est incompatible.
8. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(28/5, -12/5)\} .$$

Exercice 2 Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & - & 4y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & 5y & + & 2z & = & 8 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & + & y & + & z & = & 10 \\ x & + & & & 2z & = & 0 \end{array}\right. ;$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ -x & + & 4y & + & z & = & -1 \\ 3x & - & 2y & - & 3z & = & 4 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. ;$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & = & 8 \\ -x & + & 3y & - & 4z & = & -16 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 4z & = & -1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & -2 \end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & - & y & + & z & = & 1 \\ -5x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ x & & & - & 2z & = & 4 \\ 4x & - & y & + & 2z & = & -4 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & 2z & = & 3 \\ -2x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Solution:

1. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(2,0,1)\}.$$
2. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(10,-5;-5)\}.$$
3. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(63/40, 1/10, 7/40)\}.$$
4. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(15/9, -7/9, -4/9)\}.$$
5. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(3y, y, 0),\ y \in \mathbb{R}\}.$$
6. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(-3/5 - 8/5z, -1/5 + 14/5z, z),\ z \in \mathbb{R}\}.$$
7. L'ensemble des solutions du système est
$$\{(-2/3, -10/3, -7/3)\}$$
8. Ce système est incompatible.

Exercice 3 Sous quelle condition sur le nombre réel m le système suivant admet-il une unique solution ? Quelle est cette solution ? Dans le cas contraire existe-t-il des solutions ?

$$S_m^0 \ : \ \left\{\begin{array}{rcl} mx + y + z & = & 0 \\ x + my + mz & = & 0 \\ x + mz & = & 0 \end{array}\right.$$

Mêmes questions pour le système

$$S_m \left\{ \begin{array}{rcl} mx + y + z & = & 1 \\ x + my + mz & = & 0 \\ x + mz & = & 0 \end{array} \right.$$

Solution:

1. Si $m \notin \{-1, 0, 1\}$ alors S_m^0 admet une unique solution $(0, 0, 0)$. Si $m \in \{-1, 0, 1\}$ alors S_m^0 admet une infinité de solutions.
2. Si $m \notin \{-1, 0, 1\}$ alors S_m^0 admet une unique solution $(0, 0, 0)$.
   Si $m = 0$ le système s'écrit
   $$\left\{ \begin{array}{c} y + z = 1 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. .$$
   Ce système admet une infinité de solution et l'ensemble des solutions est
   $$\{(0, 1 - z, z), z \in \mathbb{R}\}.$$