Corrigé du partiel

Exercice 1

1. FAUX. Contrexemple : si $x = 0$, alors $-2 \leq x \leq 3$ mais on n'a pas $4 \leq x^2 \leq 9$.
2. FAUX. 1 n'a pas d'antécédent car la solution de $f(n) = 1$ est $n = \frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
3. VRAI. Démonstration :

$$\begin{aligned} g(n_1) = g(n_2) &\Rightarrow 3n_1 + 2 = 3n_2 + 2 \\ &\Rightarrow 3n_1 = 3n_2 \\ &\Rightarrow n_1 = n_2 \end{aligned}$$

   Donc g est injective.
4. VRAI : Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque (u_n) n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq A$. Puisque la suite (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_N \geq A$ pour tout $n \geq N$. Ceci montre que la suite u_n tends vers $+\infty$.

Exercice 2

1. On a

$$u_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante donc monotone.
3. N.B. On cherche des réels a et b indépendants de k.

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)}$$

   donc il faut que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a(k+1) + bk = 1$, c'est à dire $(a+b)k + a = 1$. Par identification, il vient $a + b = 0$ et $a = 1$. Donc $a = 1$ et $b = -1$.
4. D'après la question 3 :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

   donc

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{(somme télescopique)}$$

   Donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1$.

Exercice 3

1. $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
2. $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$

3.

$$f([-1;1]) = [0;1]$$
$$f([-2;-1] \cup [0;1]) = [1;2] \cup [0;1] = [0;2]$$
$$f([-2;-1]) \cap f([0;1]) = [1;2] \cap [0;1] = \{1\}$$
$$f^{-1}([-2;3]) = [-3;3]$$

Exercice 4

$$A = \sum_{k=0}^{9}(2k-9) = 2\sum_{k=0}^{9} k - 9\sum_{k=0}^{9} 1 = 2\frac{9\times 10}{2} - 9\times 10 = 90 - 90 = 0$$

$$B = \sum_{k=0}^{200} i^k = \frac{1-i^{201}}{1-i} \text{ (somme des termes d'une suite géométrique)}$$

$i^{201} = i^{4\times 50+1} = (i^4)^{50} \times i = i$ car $i^4 = 1$. Donc $B = \dfrac{1-i}{1-i} = 1$.

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(-2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(-2)^k 1^{20-k} \\ &= (-2+1)^{20} \quad \text{(formule du binôme avec } a=-2,\ b=1 \text{ et } n=20) \\ &= (-1)^{20} = 1 \end{aligned}$$

Exercice 5

1. (a)

$$|z_0| = |-8-6i| = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$
$$\overline{z_0} = -8+6i$$
$$\frac{1}{z_0} = \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2} = \frac{-8+6i}{10} = \frac{-8}{10} + \frac{6}{10}i = \frac{-4}{5} + \frac{3}{5}i$$

(b) On cherche une racine carrée w de z_0 sous forme algébrique $w = x+iy$.

$$w^2 = z_0 \Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 = -8-6i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x^2 - y^2 = -8 & (1) \\ 2xy = -6 & (2) \end{array} \right.$$

On obtient une troisième équation en considérant les modules :

$$w^2 = z_0 \Rightarrow |w|^2 = |z_0| \Rightarrow x^2 + y^2 = 10 \quad (3)$$
$$(1) + (3) \Rightarrow 2x^2 = -8 + 10 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$
$$(3) - (1) \Rightarrow 2y^2 = 10 + 8 = 18 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3 \text{ ou } y = -3$$

D'après (2), x et y sont de signes opposés. Donc il y a deux solutions :

$$w_1 = 1-3i, \qquad w_2 = -1+3i$$

[Comme on a procédé par implication, il faut vérifier que ce sont bien des solutions: $w_1^2 = (1-3i)^2 = 1-6i-9 = -8-6i$: OK.]

2. (a) $P(1) = 1-(2+i)+(3+3i)-2-2i = 4-4+3i-3i = 0$ donc 1 est racine.

   $$P'(z) = 3z^2-(4+2i)z+(3+3i)$$

   $P'(1) = 3-(4+2i)+(3+3i) = 2+i \neq 0$ donc 1 est racine de multiplicité 1.

   (b) 1 est racine donc on peut mettre $(z-1)$ en facteur. On effectue la division euclidienne de $P(z)$ par $z-1$.

$$\begin{array}{cccccccc|l}
 & z^3 & - & (2+i)z^2 & + & (3+3i)z & - & (2+2i) & \underline{z-1} \\
- & (z^3 & - & z^2) & & & & & z^2-(1+i)z+(2+2i) \\
 & 0 & - & (1+i)z^2 & + & (3+3i)z & - & (2+2i) & \\
 & & - & [-(1+i)z^2 & + & (1+i)z] & & & \\
 & & & 0 & + & (2+2i)z & - & (2+2i) & \\
 & & & & - & [(2+2i)z & - & (2+2i)] & \\
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

   On vérifie que le reste final est bien nul. On a donc

   $$P(z) = (z-1)[z^2-(1+i)z+(2+2i)]$$

   On cherche les racines complexes de $Q(z) = z^2-(1+i)z+(2+2i)$.

   $$\Delta = (1+i)^2-4(2+2i) = 1+2i-1-8-8i = -8-6i$$

   D'après la question 1.b, une racine carrée de Δ est $\delta = 1-3i$. Les racines de Q sont donc

   $$z_1 = \frac{(1+i)+(1-3i)}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

   $$z_2 = \frac{(1+i)-(1-3i)}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

   Les racines de P sont 1, $1-i$ et $2i$.

   (c) NON, car 0 a trois antécédents : 0, $1-i$ et $2i$.

Exercice 6

1. Pour que $f(x)$ soit définie il faut que $x+1>0$ et donc $\mathcal{D}_f =]-1;+\infty[$.
2. Soit $x \in [0;\infty[$. Alors

   $$x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x+1}} \leq 4 \Rightarrow 5-\frac{4}{\sqrt{x+1}} \geq 5-4 = 1$$

   Donc $f(x) \in [0;\infty[$. On a montré que $f([0;\infty[) \subset [0;\infty[$.
3. $f'(x) = \dfrac{4}{2(x+1)^{3/2}} > 0$ donc f est strictement croissante.
4. $u_0 = 5$, $u_1 = 5-\dfrac{4}{\sqrt{6}} < 5$ donc $u_1 < u_0$.
5. Montrons par récurrence que pour tout entier n, on a $u_{n+1} < u_n$ (P_n).
   - Initialisation : si $n=0$, $u_1 < u_0$ donc (P_0) est vraie.
   - Hérédité : supposons que la propriété (P_n) soit vraie pour un certain entier n. Montrons qu'alors (P_{n+1}) est vraie : On a $u_{n+1} < u_n$. Comme la fonction f est strictement croissante, on en déduit que $f(u_{n+1}) < f(u_n)$. Mais $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, donc $u_{n+2} < u_{n+1}$. (P_{n+1}) est vraie.
   - Conclusion : par récurrence, la propriété (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

6. La suite (u_n) est décroissante, minorée (par 0), donc elle converge (par le Théorème 4.1 iii). De plus, sa limite $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$ vérifie $0 \leq \ell \leq 5$.
7. ℓ est solution de $f(\ell) = \ell$.

$$\begin{aligned} \ell = 5 - \frac{4}{\sqrt{\ell+1}} \quad & \Leftrightarrow \quad \ell - 5 = -\frac{4}{\sqrt{\ell+1}} \\ & \Rightarrow \quad (\ell-5)^2 = \frac{16}{\ell+1} \\ & \Rightarrow \quad (\ell-5)^2(\ell+1) = 16 \\ & \Leftrightarrow \quad (\ell^2 - 10\ell + 25)(\ell+1) - 16 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \ell^3 - 9\ell^2 + 15\ell + 9 = 0 \end{aligned}$$

Posons $P(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9 = 0$. Une racine "évidente" de P est $x = 3$ car $P(3) = 9(3 - 9 + 5 + 1) = 0$. En effectuant la division euclidienne par $x - 3$ on trouve $P(x) = (x-3)(x^2 - 6x - 3)$. On calcule les racines de $x^2 - 6x - 3$. $\Delta = 36 + 12 = 48$. Les racines sont

$$x_1 = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3} > 5$$

$$x_2 = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{2} = 3 - 2\sqrt{3} < 0$$

Comme $0 \leq \ell \leq 5$, la seule possibilité est que $\ell = 3$. On a donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$.

Exercice 7 Fixons l'entier n. Soient $Q(x)$ le quotient et $R(x)$ le reste de la division de $P_n(x)$ par $x^2 - 1$. R est de degré ≤ 1 donc on peut écrire $R(x) = ax + b$. Il s'agit de déterminer a et b. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^{2n} + nx + 1 = Q(x)(x^2 - 1) + ax + b$$

En prenant $x = 1$, il vient

$$n + 2 = a + b$$

En prenant $x = -1$, il vient

$$-n + 2 = -a + b$$

On en déduit que $a = n$ et $b = 2$. Donc le reste est $R(x) = nx + 2$.