

L1 MI/PC

Remise en route – Calcul I

Ces séances de mise en route doivent permettre à chacun de (re-)prendre de bons réflexes de calculs sur des notions élémentaires. Pour faciliter l'acquisition des nouvelles notions de mathématique ou de physique abordées cette année, il est important de maîtriser sur le bout des doigts ces gammes (comme dirait un musicien) ou ces routines (comme dirait un sportif).

Exercice 1. Priorités calculatoires

Déterminer l'expression la plus simple des quantités suivantes

$$A = 8 - 3 \times 4, \quad B = 3 \times (7 - 2), \quad C = 2 - 5 - 4, \quad D = -2^2, \quad E = -\frac{2}{5} + \frac{3}{12},$$

$$F = (-2)^2, \quad G = \frac{1}{\frac{2}{7}}, \quad H = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}, \quad I = \frac{12^2}{4^3}, \quad J = \frac{12}{5} \times \frac{45}{16}.$$

$$A = -4, \quad B = 15, \quad C = -7, \quad D = -4, \quad E = -\frac{3}{20},$$

$$F = 4, \quad G = \frac{7}{2}, \quad H = \frac{5}{6}, \quad I = \frac{9}{4}, \quad J = \frac{27}{4}.$$

Exercice 2. Développement

Développer et réduire les expressions suivantes

$$A(x) = (x + 2)(x + 3), \quad B(x) = (x - 3)^2, \quad C(x) = -(x - 2)(x + 2), \quad D(x) = (x - 1)^2(x + 1),$$

$$E(x) = (x + 1)^3, \quad F(x) = (x - 1)^3, \quad G(x) = -(2 - x)(x - 1), \quad H(x) = (-3 - x)(6 - x).$$

$$A(x) = x^2 + 5x + 6, \quad B(x) = x^2 - 6x + 9, \quad C(x) = -x^2 + 4, \quad D(x) = x^3 - x^2 - x + 1,$$

$$E(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \quad F(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad G(x) = x^2 - 3x + 2, \quad H(x) = x^2 - 3x - 18.$$

Exercice 3. Factorisation

Factoriser les expressions suivantes

$$A(x) = x^2 - 16, \quad B(x) = x^2 - 4x + 4, \quad C(x) = (x - 1)^2 - x(x - 1),$$

$$D(x) = x^2 + 6x + 9, \quad E(x) = 4x^2 - 4x + 1, \quad F(x) = -3x^2 + 6x - 1.$$

$$A(x) = (x - 4)(x + 4), \quad B(x) = (x - 2)^2, \quad C(x) = x - 1,$$

$$D(x) = (x + 3)^2, \quad E(x) = (2x - 1)^2, \quad F(x) = -3 \left(x - \frac{-6 - 2\sqrt{6}}{6} \right) \left(x - \frac{-6 + 2\sqrt{6}}{6} \right).$$

Exercice 4.

Résoudre l'équation suivante dont l'inconnue est x et a et b sont des paramètres réels

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Que dire des réels α et β tels que $\alpha\beta = 0$?

On suppose que a et b sont non nuls. L'unique solution de l'équation est

$$\frac{1}{1/a + 1/b} = \frac{ab}{a + b}.$$

Le produit $\alpha\beta$ est nul si et seulement si α ou β est nul.

Exercice 5. Équations du second degré

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

1) $x^2 - 2x + 1 = 0$, 2) $-x^2 + 4 = 0$, 3) $x^2 - 3x + 2 = 0$, 4) $2x^2 - 9x + 1 = 0$,

5) $(2x - 1)(3 - 4x) = 0$, 6) $2x^2 + x + 4 = 0$, 7) $x^2 - 3x = 0$, 8) $4x^2 - 16 = 0$.

1) $\mathcal{S} = \{1\}$, 2) $\mathcal{S} = \{-2, 2\}$, 3) $\mathcal{S} = \{1, 2\}$, 4) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{9 - \sqrt{73}}{4}, \frac{9 + \sqrt{73}}{4} \right\}$,

5) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\}$, 6) $\mathcal{S} = \emptyset$, 7) $\mathcal{S} = \{0, 3\}$, 8) $\mathcal{S} = \{-2, 2\}$.

Exercice 6. Racine carrée

Simplifier les expressions suivantes

$$A = \sqrt{25}, \quad B = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2, \quad C = \sqrt{(-5)^2}, \quad D = \sqrt{\frac{25}{9}}, \quad E = (\sqrt{3})^2.$$

$$A = 5, \quad B = 8 - 2\sqrt{15}, \quad C = 5, \quad D = \frac{5}{3}, \quad E = 3.$$

Exercice 7. Signe d'une quantité

Grâce à un tableau de signe, trouver le signe des expressions suivantes en fonction de x

$$A(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 4}, \quad B(x) = \frac{-x^2 + 5x + 6}{x^2 + 1}, \quad C(x) = x + 1 - \frac{2}{x - 1},$$

$$D(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x - 2}, \quad E(x) = 3 + \frac{-2x^2 + 11x + 12}{x^2 - x}.$$

$$A(x) = \frac{(x - 1)(x - 3)}{x + 4}$$

x	-4	1	3
$x - 1$	-		- 0 + +
$x - 3$	-		- - 0 +
$x + 4$	-	0	+ + +
$A(x)$	-		+ 0 - 0 +

$$B(x) = \frac{-(x + 1)(x - 6)}{x^2 + 1}$$

x	-1	6	
$x + 1$	-	0	+ +
$x - 6$	-		- 0 +
$B(x)$	-	0	+ 0 -

$$C(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$$

x	$-\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$x^2 - 3$	+	0	-	+
$x - 1$	-		-	+
$C(x)$	-	0	+	

$$D(x) = \frac{x(x - 1)^2}{(x + 1)(x - 2)}$$

x	-1	0	2	
x	-		-	+
$x + 1$	-	0	+	+
$x - 2$	-		-	+
$D(x)$	-		+	0

$$E(x) = \frac{(x + 2)(x + 6)}{x(x - 1)}$$

x	-6	-2	0	1	
$x + 2$	-		-	0	+
$x + 6$	-	0	+		+
x	-		-	0	+
$x - 1$	-		-	0	+
$E(x)$	+	0	-	0	

Exercice 8. Fractions

Écrire sous la forme d'une fraction les expressions suivantes

$$A(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1}, \quad B(x) = \frac{x + 1}{x + 2} - \frac{x}{x + 1}, \quad C(x) = \frac{x + 1}{x - 2} - \frac{x^2}{x^2 + 1},$$

$$D(x) = \frac{x - 1}{x + 2} \times \frac{x}{x - 2}, \quad E(x) = \frac{x + 3}{x + 1} \times \frac{x^2 - 1}{x - 2}.$$

Trouver le signe de ses quantités en fonction de x .

$$A(x) = \frac{x(2x - 1)}{x - 1}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	
x	-	0	+	+
$2x - 1$	-		-	0
$x - 1$	-		-	0
$A(x)$	-	0	+	0

$$B(x) = \frac{1}{(x + 1)(x + 2)}$$

x	-2	-1	
$x + 1$	-		-
$x + 2$	-	0	+
$B(x)$	+		-

$$C(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{(x - 2)(x^2 + 1)},$$

$3x^2 + x + 1 > 0$ car $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$ donc $C(x) > 0$ pour $x > 2$ et $C(x) < 0$ pour $x < 2$.

$$D(x) = \frac{x(x - 1)}{x^2 - 2}$$

x	-2	0	1	2	
x	-		-	0	+
$x - 1$	-		-	0	+
$x^2 - 2$	+	0	-		-
$D(x)$	+		-	0	+

$$E(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{x-2}$$

x	-3	1	2
$x+3$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0
$E(x)$	$-$	0	$+$

Exercice 9.

1. Parmi les deux réels suivants, lequel est le plus grand : $A = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ et $B = \sqrt{8}$?
2. Même question avec $A = \sqrt{23}$ et $B = 2\sqrt{6}$.
3. Même question avec

$$A = \frac{2 + \sqrt{2}}{3} \quad \text{et} \quad B = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{5}.$$

4. Même question avec $A = \sqrt{a+b}$ et $B = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ où a et b sont deux réels positifs.

1. A et B sont positifs. De plus, $A^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ est strictement supérieur à B^2 donc $A > B$.
2. $A < B$ puisque A et B sont positifs et $A^2 < B^2$.
3. La différence $A - B$ est du signe de $1 - \sqrt{2}$ donc $A < B$.
4. $A < B$.

Exercice 10.

Simplifier les expressions suivantes

$$A = 3^2 \times 2^3, \quad B = 3^2 \times 3^3, \quad C = (2^3)^4, \quad D = 2^{(3^4)}, \quad E = \frac{2^6}{2^3},$$

$$F = \sqrt{3^4}, \quad G = \sqrt{\frac{2^3}{3^2}}, \quad H = 100^2 - 99^2, \quad I = (\sqrt{6})^6.$$

$$A = 72, \quad B = 3^5 = 243, \quad C = 2^{12}, \quad D = 2^{81}, \quad E = 8,$$

$$F = 9, \quad G = \frac{2}{3}\sqrt{2}, \quad H = 199, \quad I = 6^3 = 216.$$

Exercice 11.

Développer les expressions suivantes

$$A = (a+b+c)^2, \quad B = (a-b)(a^2+ab+b^2), \quad C = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3).$$

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac, \quad B = a^3 - b^3, \quad C = a^4 - b^4.$$

Exercice 12.

Simplifier les expressions suivantes où a et b sont deux réels

$$A = (a-b)^2 - (a+b)^2, \quad B = \frac{a^2 - b^2}{a+b}, \quad C = \frac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

$$A = -4ab, \quad B = a - b, \quad C = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$