Exercices Supplémentaires du Chapitre 7

Exercice 1 **

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$.

1) Montrer que les tangentes en 0 aux courbes $\mathcal{C}_\lambda$ des fonctions f_λ sont parallèles.
2) Montrer que les tangentes en 1 sont concourantes.

Exercice 2 *

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par $f(x) = 1 - x^2$.

1) Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.
2) Où la fonction f^{-1} est-elle dérivable ? Calculer la dérivée de f^{-1} de deux façons différentes.

Exercice 3 *

Sur quelles parties de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

1) $f : x \mapsto x\,|x|$
2) $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1}$

Exercice 4 ***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 5 *

Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x}{|x|+1}$ et donner ses asymptotes.

Exercice 6 **

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

Exercice 7 *

Démontrer que pour tout $x, y \geq 1$, $\big|\ln(x/y)\big| \leq |x-y|$.

Exercice 8 **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \exists c > 0, f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$$

Exercice 9 **

1) Étant donné α dans $[0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} \leq (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{n^\alpha}.$$

2) En déduire la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}.$$

Exercice 10 *

1) Montrer que $f : x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$
2) Montrer que $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\ln x)$ est concave.
   En déduire
$$\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \ln \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x . \ln y}$$

Exercice 11 ** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1) Montrer que si f admet un minimum local alors il s'agit d'un minimum global.
2) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$. Montrer que f admet un minimum global en a.
   [On pourra utiliser la caractérisation de la convexité avec les tangentes]
3) On suppose maintenant que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f''(x) \geq \alpha > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $f'(y) - f'(x) \geq \alpha(y-x)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que f' s'annule sur $\mathbb{R}$.
   [On pourra étudier les limites de f' en $\pm\infty$ en utilisant (a).]
   (c) Montrer que f' s'annule en un unique point a de $\mathbb{R}$.
   [On pourra procéder par contradiction et utiliser (a).]
   (d) Montrer que f admet un minimum unique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 ***
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1) Soit $\tau(x,y) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que si $a < b < c$ alors $\tau(a,b) \leq \tau(a,c)$.
2) On suppose f strictement croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
3) On suppose $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Montrer que f est positive.