

Exercices Supplémentaires du Chapitre 5

Exercice 1 **

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante tandis que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 2 *

Calculer

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} - x$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2} - x$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - x$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x}$.

Exercice 3 *

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} E(1/x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} xE(1/x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 E(1/x)$

Exercice 4 **

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Exercice 5 *

Donner le domaine de définition de $x \mapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}$ et étudier sa continuité.

Exercice 6 **

Quels sont les points de discontinuité de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x(x+1)E(x)$?

Exercice 7 **

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 8 **

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$$

Montrer que f admet un point fixe dans $[0, +\infty[$ (on pourra introduire la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{x}$).