Université de Tours
Licence L1 de Mathématiques, Informatique, Physique et Chimie - S1

Exercices Supplémentaires du Chapitre 4

Exercice 1 *
Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

$$1)\ u_n = \frac{\sin n + 3\cos n^2}{\sqrt{n}} \qquad 2)\ v_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}} \qquad 3)\ w_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin n + \ln n}$$

Exercice 2 *
Déterminer les limites des sommes suivantes :
a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$, b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$, d) $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$,
e) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.

Exercice 3 *
On définit, pour $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

1) Montrer que (u_{2n+1}) et (u_{2n}) sont deux suites adjacentes.
2) Conclure.

Exercice 4 *
Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 9}{u_n + 1}$. Montrer par l'absurde que (u_n) diverge.

Exercice 5 ** [Somme harmonique]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 6 ***
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.
2) En déduire que les deux suites convergent.
3) Montrer que $\lim u_n = \lim v_n$.

Exercice 7 **
Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que (u_n) converge ssi (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.

Exercice 8 ***
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ par

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que si $\lim u_n = 0$, alors $\lim v_n = 0$. Que pensez-vous que la réciproque ?

Exercice 9 **

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4) Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
5) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Exercice 10 **

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

1) Vérifier que la suite (u_n) est bien définie (i.e. u_n ne s'annule pas).
2) Étudier la fonction $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
3) En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (la première croissante et la seconde décroissante).
4) Déduire de ce qui précède que $f([1, +\infty[) \subset [1, 3]$, puis que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.
5) Notons $\ell_1 = \lim u_{2n+1}$ et $\ell_2 = \lim u_{2n}$.
   Montrer que $\ell_1 = 1 + \dfrac{2}{\ell_2}$ et $\ell_2 = 1 + \dfrac{2}{\ell_1}$.
6) En déduire que $\ell_1 = \ell_2$ et conclure.