Exercices Supplémentaires du Chapitre 3

Exercice 1 *
Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :
a) $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$
b) $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$
c) $(x \leqslant 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$.

Exercice 2 **
Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x + y \geq 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x \geq 1/2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/y \geq 1/2\}$.

Exercice 3 *
Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que l'on a équivalence entre :
a) $A \subset B$; b) $A \cap B = A$; c) $A \cup B = B$; d) $A \setminus B = \emptyset$.

Exercice 4 *
Soient A et B deux parties de E, on appelle différence symétrique de A et B, l'ensemble

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Faire un dessin puis montrer que

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Exercice 5 *
Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions (a), (b), (c), (d) sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leurs négations.

Exercice 6 *
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire mathématiquement les propositions suivantes et leurs négations.

1) f est une application constante
2) f est une application majorée.
3) f est une application décroissante.

Exercice 7 *
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto 3x - 2$. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f([0, 1])$, $f^{-1}([0, 1])$. Même questions avec $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto (3x - 2)^2$.

Exercice 8 *
Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$. Déterminer $f(\mathbb{R}^*)$, $f(]0, 1[)$, $f^{-1}(]0, 1[)$ et $f^{-1}(] - 1, 1[)$.

Exercice 9 *

Les applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont-elles injectives, surjectives, bijective ?

$$1)\ x \mapsto 3x-1, \qquad 2)\ x \mapsto \sin(x), \qquad 3)\ x \mapsto x^2+x+1.$$

Exercice 10 *

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x+1|-|2x-1| \end{array}$$

1) Tracer le graphe de f.
2) L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 11 **

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
b) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
Etudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 12 **

Soit E un ensemble fini non vide dont on note $n \in \mathbb{N}^*$ le cardinal (i.e. son nombre d'éléments).

1) Soit A une partie de E. Montrer que

$$A = E \Leftrightarrow Card(A) = n.$$

2) On considère $f : E \longrightarrow E$ une application et on veut montrer que l'on a équivalence entre (I) f injective ; (S) f surjective ; (B) f bijective.
   a) On suppose f injective.
      i) Montrer que $Card(f(E)) = n$, puis que f est surjective.
      ii) Quelles relations en déduire entre les propositions (I), (S) et (B) ?
   b) On suppose f non injective.
      i) Montrer que $Card(f(E)) < n$, puis que f n'est pas surjective.
      ii) Quelles relations en déduire entre les propositions (I), (S) et (B) ?
   c) Conclure.

Exercice 13 ***

Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p.

1) Combien y a-t-il d'injections de E dans F ?
2) On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.
   a) Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.
   b) On suppose $p \leqslant n$ et on considère a un élément de E. On observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F, établir que $S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$.
   c) En déduire que $S_n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.