Université de Tours
Licence L1 de Mathématiques, Informatique et Sciences de la Matière - S1

Exercices Supplémentaires du Chapitre 2

Exercice 1 *
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2 *
Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3+3i, \quad z_2 = -1-\sqrt{3}i, \quad z_3 = -\frac{4}{3}i, \quad z_4 = -2.$$

Exercice 3 **
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ dans les cas suivants :

$$1) \quad \frac{|1+z|}{|1-z|} = 1, \qquad 2) \quad \frac{|1+z|}{|1-z|} = \sqrt{2}.$$

Exercice 4 *
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2+z+1=0$,
2) $2z^2-(7+3i)z+2+4i=0$,
3) $z^4-(5-14i)z^2-2(12+5i)=0$.

Exercice 5 **
Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 6 **

1) Exprimer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2) Donner une forme linéarisée de $\sin^3(\theta)$.

Exercice 7 **
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 8 *
Effectuer les divisions euclidiennes de

1) $3x^5+4x^2+1$ par x^2+2x+3,
2) $3x^5+2x^4-x^2+1$ par x^3+x+2.

Exercice 9 ***
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\sin(\theta)x + \cos(\theta))^n$ par $x^2 + 1$.

Exercice 10 *
Décomposer $x^7 - 1$ en produit de polynômes réels irréductibles.

Exercice 11 *
Considérons le polynôme réel $P(z) = z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 18z - 18$.

1) Montrer que si z est une racine complexe de P, alors son conjugué $\bar{z}$ est aussi une racine de P.
2) Vérifier que $3i$ est une racine de P. En déduire une autre racine de P.
3) Sans faire de division euclidienne, montrer que $x^2 + 9$ divise P.
4) Écrire P comme produit de polynômes irréductibles réels, puis comme produit de polynômes irréductibles complexes.

Exercice 12 **
Déterminer les polynômes réels P tels que $P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$ (on pourra commencer par déterminer leur degré).

Exercice 13 **
Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme réel P_n que l'on déterminera, tel que $P_n(x) - P_n'(x) = x^n$.

Exercice 14 **
Déterminer les solutions (x, y, z) du système

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x + y + z & = & 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 8 \\ xyz & = & -1 \end{array} \right. .$$