Calcul de déterminants

Exercice 1 Calculer les déterminants des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -8 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution: $\det(A) = -2 \neq 0$ et A est donc inversible.
B est triangulaire, son déterminant est donc le produit des termes diagonaux. Donc $\det(B) = 40 \neq 0$. B est donc inversible.
$\det(C) = -40 \neq 0$ et C est donc inversible.
$\det(D) = -56$ et D est donc inversible.

Exercice 2 Pour chacune des matrices $A \in \mathcal{M}_n$ suivantes, déterminer les nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $A - xI_n$ ne soit pas inversible.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution: $\det(A_1 - xI_2) = (2-x)(-1-x)$ et donc A_1 est inversible ssi $x \notin \{2, -1\}$.
$\det(A_2 - xI_2) = (7-x)(4-x) - 18 = x^2 - 11x + 10$ et donc A_2 est inversible ssi $x \notin \{1, 10\}$.
$\det(A - xI_3) = (2-x)\left[x^2 - 6x - 7\right]$ et donc A_3 est inversible ssi $x \notin \{-1, 2, 7\}$.
$\det(A_4 - xI_2) = -x(x^2+1)$ et donc A_4 est inversible ssi $x \neq 0$.