

Calcul matriciel

1 Opérations sur les matrices

Exercice 1 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Parmi les produits suivants, indiquer lesquels sont possibles et les calculer :
 AB,BA,AC,CA,AD,DA,BC,CB,BD,DB,CD,DC.

Exercice 2 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer et comparer $A^2 - B^2$ et $(A - B)(A + B)$.
- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $M, N \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M et N pour que l'on ait $M^2 - N^2 = (M - N)(M + N)$.

Exercice 3 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Q_{13}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer $L_2(5) \cdot A$, $Q_{13}(3) \cdot A$ et $R_{23} \cdot A$. Que remarque-t-on ?
- b) Calculer $A \cdot L_2(5)$, $A \cdot Q_{13}(3)$ et $A \cdot R_{23}$. Que remarque-t-on ?

Exercice 4 Calculer l'inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 Soient les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $AB = AC$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 6 Calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$