Université de Tours
Licence L1 de Mathématiques, Informatique, Physique, Chimie, Sciences de la vie - S1

Calcul matriciel

1 Opérations sur les matrices

Exercice 1 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Parmi les produits suivants, indiquer lesquels sont possibles et les calculer :
AB,BA,AC,CA,AD,DA,BC,CB,BD,DB,CD,DC.

Solution: On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \\ -1 & 11 & 12 \end{pmatrix},$$

$$DA = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 18 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad CD = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer et comparer $A^2 - B^2$ et $(A - B)(A + B)$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $M, N \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M et N pour que l'on ait $M^2 - N^2 = (M - N)(M + N)$.

Solution: On trouve :

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -9/4 & 15/2 & -3/2 \\ -11 & 6 & -19 \\ 7/2 & 19 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} 7/4 & 15/2 & 7 \\ -21/2 & -7 & -14 \\ -3/2 & 23 & 12 \end{pmatrix}.$$

On a $M^2 - N^2 = (M - N)(M + N)$ si et seulement si $MN = NM$.

Exercice 3 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; L_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; Q_{13}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $L_2(5) \cdot A$, $Q_{13}(3) \cdot A$ et $R_{23} \cdot A$. Que remarque-t-on ?
b) Calculer $A \cdot L_2(5)$, $A \cdot Q_{13}(3)$ et $A \cdot R_{23}$. Que remarque-t-on ?

Solution: On trouve

$$L_2(5)A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 15 & 10 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{13}(3)A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{23}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A.L_2(5) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad AQ_{13}(3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} A.R_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Calculer l'inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution: On trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 5 & -2 & -15/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Soient les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $AB = AC$. La matrice A est-elle inversible ?

Solution: La matrice A n'est pas inversible. En effet si elle l'était alors en multipliant par A^{-1} l'égalité $AB = AC$ on trouverait $B = C$. Mais $B \neq C$.

Exercice 6 Calculer la puissance $n^{\text{iéme}}$ des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Solution:
Quelques calculs donnent

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous laisse penser que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3 \times 2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer ce résultat on procède par récurrence. Soit (P_n) la propriété

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3 \times 2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Initialisation. Pour $n = 1$, le terme de gauche dans (P_1) est A et le terme de droite est

$$\begin{pmatrix} 2^1 & 3 \times 2^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi (P_1) est vérifiée.

Hérédité. Soit $n \geq 1$. On suppose que (P_n) **est vraie** et on doit montrer que (P_{n+1}) est vraie. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \cdot A^n \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 3 \times 2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en utilisant } P_n \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3 \times 2^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi (P_{n+1}) est vérifiée.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Quelques calculs donnent

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}, B^4 = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{pmatrix}$$

ce qui nous laisse penser que

$$B^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour montrer ce résultat on procède par récurrence. Soit (P_n) la propriété ci-dessus.

Initialisation. Pour $n = 1$, le terme de gauche dans (P_1) est B et le terme de droite est

$$\begin{pmatrix} 3^0 & 3^0 & 3^0 \\ 3^0 & 3^0 & 3^0 \\ 3^0 & 3^0 & 3^0 \end{pmatrix} = B$$

Ainsi (P_1) est vérifiée.

Hérédité. Soit $n \geq 1$. On suppose que (P_n) **est vraie** et on doit montrer que (P_{n+1}) est vraie. On a

$$\begin{aligned}
B^{n+1} &= B \cdot B^n \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{en utilisant } P_n \\
&= \begin{pmatrix} 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

car chaque coefficient vaut $3^{n-1} + 3^{n-1} + 3^{n-1} = 3^{n-1}(1+1+1) = 3^n$. Ainsi (P_{n+1}) est vérifiée.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.