Université de Tours Année 2014-2015
Licence L1 de Mathématiques, Informatique et Sciences de la Matière - S1

Un Corrigé du Partiel du 12 novembre 2014

Exercice 1

1. (a) (P) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ et (Q) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$
   (b) La suite u est croissante et majorée, elle est donc convergente.
2. (a) La suite u converge vers 2.
   (b) La suite constante égale à 2 vérifie (R).
   (c) $\exists \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - 2| > \epsilon$

Remarques : 1.(a). Les inégalités sont larges. (b) On ne peut pas conclure que la suite converge vers 2. On peut simplement dire que la limite de u va être inférieure ou égale à deux.

Exercice 2

1. (a) On a $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{n+2}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2(n+1)^2 - 2n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$$
   et donc la suite est croissante.
   (c) La suite étant croissante, elle est minorée par son premier terme $u_0 = 0$. De plus on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_n = \frac{2n}{n+1} \leq \frac{2n}{n} = 2 \text{ puisque } n+1 \geq n.$$
   Ainsi, la suite u est majorée par 2.
   (d) On a
   $$u_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2n}{n(1+1/n)} = \frac{2}{1+1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \text{ puisque } \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. (a) On a $u_n = n^2 - n + (-1)^n \geq n^2 - n - 1$ puisque $(-1)^n \in \{-1, 1\}$. De plus
   $$n^2 - n - 1 = n^2 \cdot (1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
   puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. Par comparaison, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(b) On a

$$u_n = \frac{n^2 \cdot (1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})}{n^2 \cdot (\frac{\cos(n^2)}{n^2} - 2)} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{\frac{\cos(n^2)}{n^2} - 2}$$

Comme $-1 \leq \cos(n^2) \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos(n^2)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

ce qui implique, par le théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n^2)}{n^2} = 0$.
On a

$$1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
$$\frac{\cos(n^2)}{n^2} - 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{2}$.

(c) On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1-(3/4)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = 4 \cdot (1-(3/4)^{n+1}).$$

Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Exercice 3

1. On peut appliquer la méthode vue en cours et chercher $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = 8 - 6i$. En développant et en identifiant parties réelle et imaginaire, cela donne

$$a^2 - b^2 = 8 \text{ et } 2ab = -6.$$

On a aussi $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |8 - 6i| = \sqrt{64+36} = 10$. On dispose donc des équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \text{ et } ab = -3.$$

De l'addition des deux premières découle que $a^2 = 9$. Pour $a = 3$, la troisième impose que $b = -1$ et pour $a = -3$ on obtient $b = 1$. Autrement dit, les racines cherchées sont $\delta = 3 - i$ et $-\delta = -3 + i$.

2. Pour résoudre l'équation du second degré, on calcule le discrimant

$$\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times \frac{3}{2}i = 8 - 6i.$$

Les solutions complexes de $z^2 - 2\sqrt{2}z + \frac{3}{2}i = 0$ sont donc

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2} - 3 + i}{2} = \sqrt{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \text{ ou } z_2 = \frac{2\sqrt{2} + 3 - i}{2} = \sqrt{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

Exercice 4

1. Nous avons $P(1) = 0$. De plus, $P'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$ donne $P'(1) = 0$. En revanche, $P''(x) = 12x^2 - 6x$ donne $P''(1) = 6 \neq 0$. Ainsi, d'après le cours, on sait que 1 est racine double de P, autrement dit que P est divisible par $(x-1)^2$ (mais pas par $(x-1)^3$).
2. Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - x^3 - x + 1 & x^2 - 2x + 1 \\
\hline
-(x^4 - 2x^3 + x^2) & x^2 + x + 1 \\
x^3 - x^2 - x + 1 & \\
-(x^3 - 2x^2 + x) & \\
x^2 - 2x + 1 & \\
0 &
\end{array}$$

Ainsi
$$P(x) = (x-1)^2(x^2 + x + 1).$$
Le discriminant de x^2+x+1 vaut $\Delta = -3 = 3i^2$. Ses racines sont donc $j = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. Finalement P admet une racine double 1 et deux racines simples j et $\bar{j}$.

Exercice 5 Pour tout entier $n \geq 1$, notons P_n la propriété $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
On va montrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.
- *Initialisation :* Pour $n = 1$, on a d'une part $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \times (1+1) = 2$ et d'autre part $\dfrac{1 \times (1+1) \times (1+2)}{3} = 2$. Donc P_1 est vraie.
- *Hérédité :* Soit $n \geq 1$ un entier. On fait l'hypothèse que P_n est vraie. Montrons que cette hypothèse entraîne que P_{n+1} est vraie. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{(n+1)} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \quad \text{par hypothèse} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}
\end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.
- *Conclusion :* On a montré que P_1 est vraie et que pour tout $n \geq 1$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Par le principe de récurrence, on en déduit que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 6 Des exemples possibles sont :

1) $E = \mathbb{R}_+$ et $F = \mathbb{R}$.
2) $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}_+$.
3) $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$.
4) $E = \mathbb{R}_+$ et $F = \mathbb{R}_+$.

Remarques : 1) D'autres exemples étaient possibles. 2) Il fallait bien sûr s'assurer que l'application proposée était bien définie, c'est-à-dire que $f(E) \subset F$.