Université de Tours Année 2014-2015

Licence L1 de Mathématiques, Informatique et Sciences de la Matière - S1

Un Corrigé de l'examen de décembre 2015

Exercice 1. Questions de cours

1. Dans $\mathbb{C}$, il y a 5 racines 5-ième de l'unité :

$$1 = e^{i0}, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon$
3. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement de f en x_0

$$\tau_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie en x_0.

4. Non ! La fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 puisque $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ mais elle n'est pas dérivable. En effet, le taux d'accroissement de f en 0 est $\tau_0(x) = \dfrac{|x|}{x}$ et

$$\lim_{x\to 0^+} \tau_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} \tau_0(x) = -1.$$

Ainsi le taux d'accroissement de f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 2.

1. Lorsque $m = 0$ on a

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve après calculs

$$A_0^2 + 2A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. On a $\det(A_m) = -m(m+2)$. Une matrice est inversible siet seulement si son déterminant est non nul, on voit donc que A_m est inversible si et seulement si $m \notin \{0, 2\}$.
3. On a

$$(S_m) \quad \begin{cases} x + my - z & = 1 \\ mx - y + 2z & = 0 \\ -x + z & = -1 \end{cases}$$

4. On a

$$(S_0) \quad \begin{cases} x - z & = 1 \\ -y + 2z & = 0 \\ -x + z & = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z & = 1 \\ -y + 2z & = 0 \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (S_0) est

$$\{(1 + z, 2z, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

5. La matrice A_1 étant inversible, le système (S_1) admet une unique solution. On a

$$(S_0) \quad \begin{cases} x + y - z & = 1 \\ x - y + 2z & = 0 \\ -x + z & = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z & = 1 \\ -2y + 3z & = -1 \\ y & = 0 \end{cases}$$

Le système S_1 admet une unique solution $(2/3, 0, -1/3)$.

Exercice 3.

1. On a
$$u_n = \frac{3n^2+5n-1}{n^2+2} = \frac{n^2(3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{3+\frac{5}{3n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.
2. On a
$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
3. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, on a
$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$$
et donc
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq w_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}.$$
De plus
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}.$$
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

Exercice 4.

1. On a
$$f(x) = g(x) \iff xe^{1-x} = x^2e^{1-x} \underset{\text{car } e^{1-x}\neq 0}{\iff} x = x^2 \iff x \in \{0,1\}.$$
Ainsi les abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont 0 et 1.
2. Par croissance comparée, on trouve que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0, \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$
3. Les fonctions $x \mapsto 1-x$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme produits et composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a
$$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x) \quad \text{et} \quad g'(x) = 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = e^{1-x}x(2-x)$$
4.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

5. La tangente au point x de f a pour coefficient directeur $f'(x)$, c'est à dire $e^{1-x}(1-x)$. La tangente au point x de g a pour coefficient directeur $g'(x)$, c'est-à-dire $e^{1-x}x(2-x)$. Les tangentes sont parallèles si les coefficients directeurs sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si :

$$e^{1-x}(1-x) = e^{1-x}x(2-x) \underset{\text{car } e^{1-x} \neq 0}{\iff} (1-x) = x(2-x) \iff x^2 - 3x + 1 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 5.

1. Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction réelle telle que $[a, b] \subset \mathscr{D}_f$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
2. On va appliquer le TAF sur l'intervalle $[n, n+1]$ à la fonction f définie $f(x) = xe^{1/x}$. Puisque la fonction $x \mapsto 1/x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, on voit que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $[n, n+1] \subset \mathbb{R}^*$ et donc f est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. On peut donc appliquer le théorème. Il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c_n) \iff (n+1)e^{\frac{1}{n+1}} - ne^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{c_n}} - \frac{1}{c_n}e^{\frac{1}{c_n}} = \frac{c_n - 1}{c_n}e^{\frac{1}{c_n}}$$

3. On a $n \leq c_n \leq n+1$ pour tout $n \geq 1$ et donc

$$\frac{n-1}{n+1}e^{\frac{1}{n+1}} \leq u_n = \frac{c_n - 1}{c_n}e^{\frac{1}{c_n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$$

Comme $\lim \dfrac{n-1}{n+1}e^{\frac{1}{n+1}} = 1$ et $\lim e^{\frac{1}{n}} = 1$, on obtient $\lim u_n = 0$.

Exercice 6.

1. On a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^4 + 2x^3 + a}{x^4 - x} = \frac{(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4})}{1 - \frac{1}{x^4}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

et

$$f(x) - x = \frac{(x^4 + 2x^3 + a) - x(x^3 - 1)}{x^3 - 1} = \frac{2x^3 + x + a}{x^3 - 1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 2$$

ce qui montre que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote de f en $+\infty$.

2. Les fonction $x \mapsto x^4 + 2x^3 + 1$ et $x \mapsto x^3 - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et le polynôme $x^3 - 1$ ne s'annule qu'en 1, ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$. La fonction f sera continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + 2x^3 + a}{x^3 - 1} = b.$$

En particulier, $\dfrac{x^4 + 2x^3 + a}{x^3 - 1}$ doit admettre une limite finie en 1 ce qui force le polynôme $x^4 + 2x^3 + a$ à s'annuler en 1. Ainsi $3 + a = 0$, soit $a = -3$. On a alors $x^4 + 2x^3 - 3 = (x-1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)$ et

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + 2x^3 - 3}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x^2 + x + 1} = 10/3.$$

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = -3$ et $b = 10/3$.