Un Corrigé de l'examen de décembre 2013

Exercice 1.

1. On a
$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
On trouve
$$A_0 - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_0 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $$(S_m) \quad \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ mx - y + z = m \\ x + y + z = 3m \end{cases}$$
3. Après calculs, on trouve
$$\det(A_m) = 3 - 3m.$$
Ainsi
$$\begin{aligned} \det(A_0) &= 3 - 3 \times 0 = 3 \\ \det(2\,{}^t A_0) &= \det(2A_0) = 2^3 \det(A_0) = 24 \\ \det(A_0^3) &= \det(A_0)^3 = 3^3 = 27. \end{aligned}$$
4. La matrice A_m est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, On a
$$\det(A_m) \neq 0 \iff 3 - 3m \neq 0 \iff m \neq 1.$$
5. La matrice A_0 est inversible d'après la question précédente ce qui montre que S_0 admet une unique solution. Le système (S_0) est homogène et donc $(0,0,0)$ est solution de (S_0). Finalement $(0,0,0)$ est l'unique solution de S_0.
6. On a
$$(S_1) \quad \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$
L'ensemble des solutions de S_1 est donc
$$\{(2 - z, 1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2.

1. (a) On a
$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}.$$
On reconnait ainsi le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0. Or cette fonction est dérivable en 0 de dérivée 1, on a donc
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$
(b) On a
$$f(x) = \frac{x}{2} + x \left(\underbrace{\frac{x}{e^x - 1}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 1} \right)$$
et donc on voit que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Ceci montre que f est continue en 0.

(c) Les fonction $x \mapsto \dfrac{x}{2}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^x - 1$ ne s'annule qu'en 0 ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pour tout $x \neq 1$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x(e^x-1) - x^2e^x}{(e^x-1)^2}.$$

(c) Le taux d'accroissement de f en 0 est

$$\tau_0(x) = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{e^x-1}}{x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$$

ansi f est dérivable en 0.

2. On a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2$$

et

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x^2}{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$ est asymptote en $+\infty$.

Exercice 3.

1. Puisque $u_0 \in [1,2]$, pour montrer que u_n existe et que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit de montrer que l'intervalle $[1,2]$ est stable par f, c'est-à-dire que $f([1,2]) \subset [1,2]$. Soit $x \in [1,2]$. On a $f(x) = \ln(3+x)$ et comme la fonction ln est croissante et $1 \leq x \leq 2$, on trouve $\ln(4) \leq f(x) \leq \ln(5)$. De plus on a $e \leq 4 \leq 5 \leq e^2$ et comme ln est croissante, on trouve

$$1 = \ln(e) \leq \ln(4) \leq \ln(5) \leq \ln(e^2) = 2$$

d'où $1 \leq f(x) \leq 2$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(3+x) - x$. On vérifie facilement que $[1,2] \in \mathscr{D}_g$ et que g est continue sur $[1,2]$. De plus on a

$$g(1) = \ln(4) - 1 > 0 \text{ et } g(2) = \ln(5) - 2 < 0.$$

On voit donc, d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, que g s'annule en au moins un point $\ell \in [1,2]$. Pour montrer que ℓ est unique on va montrer que g est strictement décroissante. La fonction g est dérivable sur $[1,2]$ et

$$g'(x) = \frac{1}{x+3} - 1.$$

Comme $1 \leq x \leq 2$ on voit que

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad -\frac{4}{5} \leq \frac{1}{x+3} - 1 \leq -\frac{3}{4}$$

On a donc $g'(x) < 0$ sur $[1,2]$. Ainsi g est strictement décroissante et g s'annule en unique point $\ell \in [1,2]$. On a $g(\ell) = 0 \iff f(\ell)$ d'où le résultat.

3. Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction réelle telle que $[a,b] \subset \mathscr{D}_f$. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

4. La fonction f est continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$ de dérivée $\dfrac{1}{x+3}$. Soient $x, y \in [1,2]$. On va appliquer le TAF à la fonction f sur l'intervalle $[x,y]$. Puisque f est continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$ elle est aussi continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$. D'après le TAF, il existe $c \in]x,y[\subset]1,2[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = \frac{1}{c+3}.$$

Comme $c \in]1,2[$ on a

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{c+3} \leq \frac{1}{4}$$

d'où

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \frac{1}{4}$$

et $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{4}|x-y|$.

5. Montrons ce résultat par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est clair puisque l'inégalité devient
$$|u_0 - \ell| \leq |u_0 - \ell|.$$
Soit $n \geq 0$ et supposons que $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell|$. On a alors
$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &= |f(u_n) - f(\ell)| \quad \text{(puisque } f(\ell) = \ell \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)\text{)} \\ &\leq \frac{1}{4}|u_n - \ell| \quad \text{(d'après la question 4.)} \\ &\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell| \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \ell| \end{aligned}$$
L'inégalité est donc vraie au rang $n + 1$. D'après le principe de récurrence on a
$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell|$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Comme $0 \leq \frac{1}{4} < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{4})^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$, ce qui montre que la suite u_n converge vers ℓ.