Corrigé du partiel

Exercice 1

1) $u_1 = e^{v_1} = e^{\ln 2} = 2$. Pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = e^{v_{n+1}} = e^{\ln(2-e^{-v_n})} = 2 - e^{-v_n} = 2 - \frac{1}{e^{v_n}} = 2 - \frac{1}{u_n}$$

2)

$$u_2 = 2 - \frac{1}{u_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$u_3 = 2 - \frac{1}{u_2} = 2 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$
$$u_4 = 2 - \frac{1}{u_3} = 2 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$u_n = \frac{n+1}{n} \qquad (P_n)$$

- <u>Initialisation :</u> Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $\frac{n+1}{n} = 2$ donc (P_1) est vraie.
- <u>Hérédité :</u> Supposons la propriété (P_n) vraie pour un certain entier $n \geq 1$ et montrons qu'alors (P_{n+1}) est vraie.

  $$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1}$$

  donc (P_{n+1}) est vraie.
- <u>Conclusion :</u> Par récurrence, la propriété (P_n) est vraie pour tout $n \geq 1$.

4) $v_n = \ln u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$.

5) On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln 1 \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

ainsi $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$.

Exercice 2

1)

$$u_n = \frac{n^2\left(5 - \frac{\cos(n!)}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{5 - \frac{\cos(n!)}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

On a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et l'encadrement

$$\frac{-1}{n^2} \leq \frac{\cos(n!)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, le théorème des "gendarmes" nous dit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2} = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{5-0}{1+0} = 5.$$

2) Le terme v_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc

$$v_n = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{3})^n = 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Exercice 3

1) $A = \sum_{k=0}^{100} k - \sum_{k=0}^{100} 50 = \frac{100 \times 101}{2} - 101 \times 50 = 50 \times 101 - 101 \times 50 = 0.$

2) Par la <u>formule du binôme</u> avec $n = 1000$, $a = -4$ et $b = 2$:

$$\sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} (-4)^k 2^{1000-k} = (-4+2)^{1000} = (-2)^{1000} = 2^{1000}$$

On en déduit que

$$B = \sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} (-4)^k 2^{1000-k} - \binom{1000}{0} (-4)^0 2^{1000-0} = 2^{1000} - 2^{1000} = 0.$$

Exercice 4

1) $z_0 = (2+i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$

2) $P(-1) = (-1)^3 + (\sqrt{3}+1)(-1)^2 + (\sqrt{3}-i)(-1) - i = -1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + i - i = 0$

3) -1 est racine de P donc on peut factoriser P par $(z+1)$. On pose la division :

$$\begin{array}{rcccccc|l}
z^3 & + & (\sqrt{3}+1)z^2 & + & (\sqrt{3}-i)z & - & i & \underline{z+1} \\
-(z^3 & + & z^2) & & & & & z^2 + \sqrt{3}z - i \\
 & & \sqrt{3}z^2 & + & (\sqrt{3}-i)z & - & i & \\
 & & -(\sqrt{3}z^2 & + & \sqrt{3}z) & & & \\
 & & & & -iz & - & i & \\
 & & & & -(-iz & - & i) & \\
 & & & & & & \mathbf{0} &
\end{array}$$

Donc $P(z) = (z+1)(z^2+\sqrt{3}z-i)$. Cherchons les racines complexes de $z^2+\sqrt{3}z-i$. Le discriminant est $\Delta = 3+4i$. D'après la question 1), une racine carrée complexe de Δ est $\delta = 2+i$. Les solutions sont donc

$$z_1 = \frac{-\sqrt{3}+2+i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-\sqrt{3}-2-i}{2}.$$

La factorisation de $P(z)$ en polynômes irréductibles complexes est donc

$$P(z) = (z+1)(z-z_1)(z-z_2) = (z+1)\left(z+\frac{\sqrt{3}-2-i}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{3}+2+i}{2}\right)$$

Exercice 5

1) On met le membre de droite sous forme trigonométrique :

$$\sqrt{2}\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{1-i\sqrt{3}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

Les solutions sont donc :

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \qquad \text{pour } 0 \leq k \leq 6$$

2) $z=0$ est une solution évidente. On cherche les solutions non nulles sous forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$.

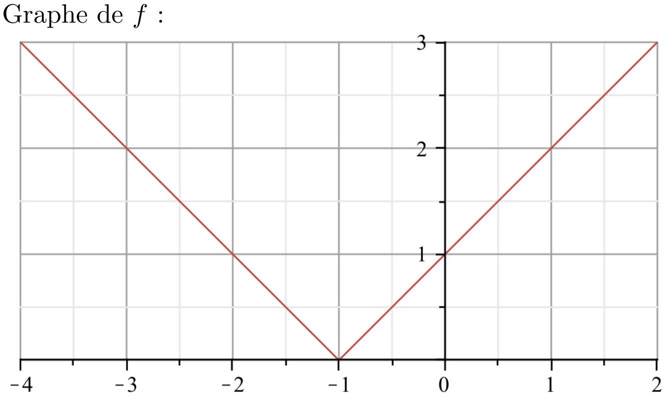
$$z^5 = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad \left(re^{i\theta}\right)^5 = \overline{re^{i\theta}} \Leftrightarrow r^5e^{5i\theta} = re^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r^5 = r \\ 5\theta = -\theta + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r^4 = 1 \\ 6\theta = 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{6} \end{array}\right.$$

Les solutions sont donc 0 et les $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{6}}$ pour $0 \leq k \leq 5$. (On reconnait les racines sixièmes de l'unité.)

Exercice 6

1) a) Graphe de f :



b) Par lecture graphique :
$f([-3;2]) = [0;3]$
$f(\{-2\}) = \{1\}$
$f^{-1}(\{1\}) = \{-2;0\}$
$f^{-1}([-5;2]) = [-3;1]$.

c) f n'est **pas injective** car par exemple 1 a deux antécédents qui sont -2 et 0. f n'est **pas surjective** car elle ne prend que des valeurs positives donc par exemple -1 n'a pas d'antécédent.

2) a)

$$g(y) = 1 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = 2$$

donc

$$\begin{aligned} g(f(x)) = 1 &\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 2 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -3 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

Donc $S = \{-3; -1; 1\}$.

b) On fait deux cas :

- Si $x \geq -1$, on a $f(x) = x + 1$ donc $g(x) = |x + 1 - 1| = |x|$.
- Si $x \leq -1$, on a $f(x) = -x - 1$ donc $g(x) = |-x - 1 - 1| = |x + 2|$.

Connaissant le graphe des fonctions $|x|$ et $|x + 2|$, on en déduit le graphe de $g \circ f$: