Un corrigé de l'examen partiel du samedi 27 Octobre 2012

Exercice 1.

1. Traduire en langage mathématique les propositions suivantes concernant la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   (P) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
   (Q) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée ;
   (R) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. Ecrire en français puis en langage mathématique la négation non(Q) de (Q).
3. On suppose (P) et non(Q) vraie. Qu'en déduisez-vous pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

1. (P) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}$

   (Q) $\exists m\in\mathbb{R} : \forall n\in\mathbb{N},\ u_n \geqslant m$

   (R) $\forall A\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n\geqslant n_0,\ u_n\leqslant A$

2. La négation non (Q) : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, qui s'écrit en langage mathématique : $\forall m\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{N} : u_n < m$.

3. Si (P) et non (Q) vraie, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ (c-à-d : $\lim u_n = -\infty$).

Autrement écrit : $\big(P \text{ et non}(Q)\big) \Rightarrow (R)$

Exercice 2. Etudier la convergence et déterminer la limite eventuelle des suites de terme général :

$$a)\ u_n = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big),\quad b)\ v_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{2})^k\quad c)\ w_n = n^2-\cos n\,.$$

a) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} k\Big) = \dfrac{1}{n^2}\,\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}$ avec $\lim \dfrac{1}{n}=0$

par conséquent : (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

b) $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{2})^k = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{2})^k\cdot 1^{n-k}$ donc grâce à la formule du binôme de Newton, $v_n = (1+\sqrt{2})^n$ et puisque $1+\sqrt{2}>1$

$\lim v_n = +\infty$: (v_n) diverge et $\lim v_n = +\infty$.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $-1\leqslant \cos n\leqslant 1$, par conséquent :

$\forall n\in\mathbb{N},\ n^2-1\leqslant n^2-\cos n = w_n$ avec $\lim\,(n^2-1) = +\infty$:

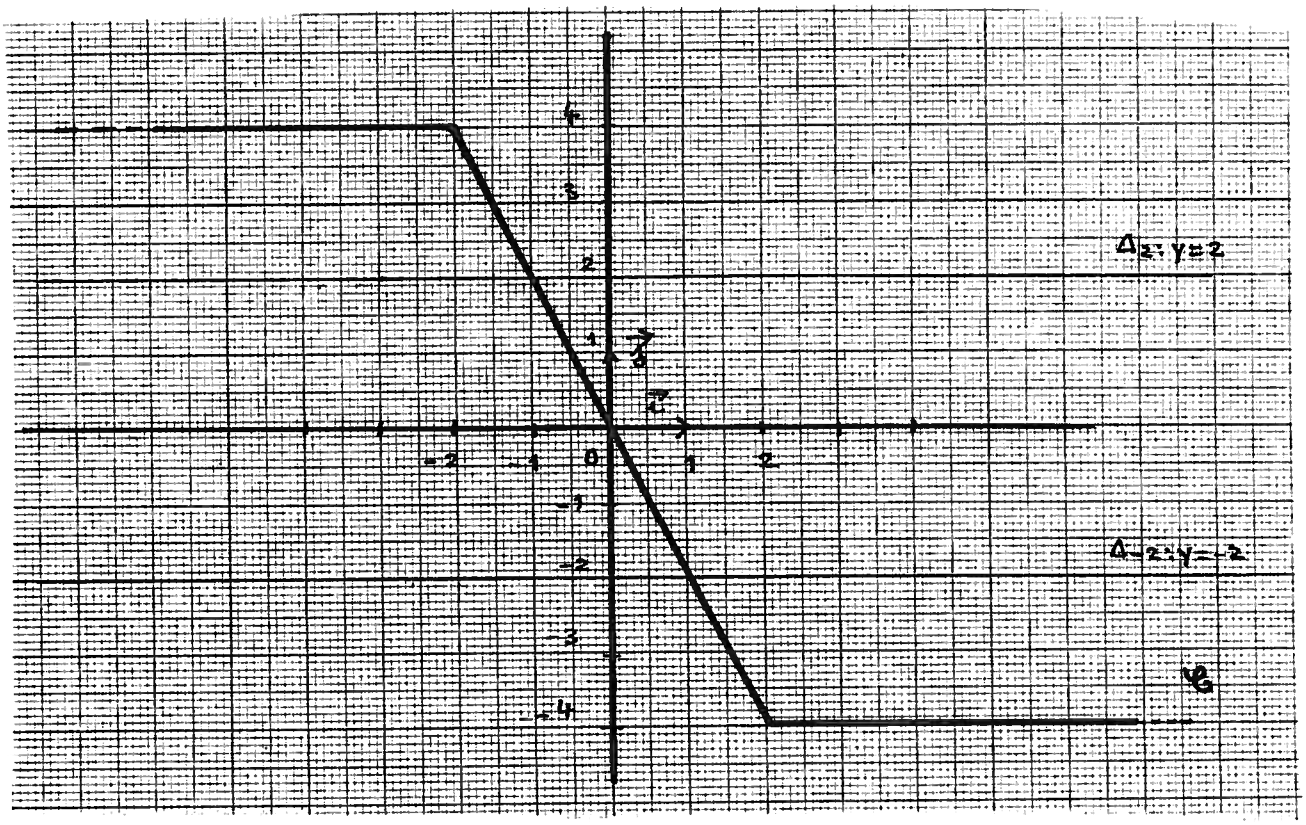
(w_n) diverge et $\lim w_n = +\infty$.

Exercice 3. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x-2| - |x+2|$.

1. Tracer la courbe représentative C de f.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation : $|f(x)| < 2$.

1. $|x-2| \begin{cases} = x-2 & \text{si } x \geqslant 2 \\ = -x+2 & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$ et $|x+2| \begin{cases} = x+2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ = -x-2 & \text{si } x \leqslant -2 \end{cases}$

x	$-\infty$ -2	2	$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$-\lvert x+2\rvert$	$x+2$	$-x-2$	$-x-2$
$f(x)$	4	$-2x$	-4



2- $|f(x)| < 2 \iff -2 < f(x) < 2$

Par lecture graphique, on obtient : $-1 < x < 1$, soit $\underline{x \in]-1, 1[}$.

Autrement dit : $f^{-1}(]-2, 2[) =]-1, 1[$.

Exercice 4. Soit f l'application de $E = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $F = [-1, 1]$ définie par : $f(x) = \cos(x)$.

1. Déterminer
$$a)\ f(\{\frac{\pi}{3}\}) \quad b)\ f([-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]) \quad c)\ f^{-1}(\{-1\}) \quad d)\ f^{-1}(\{0\}).$$
2. En justifiant vos réponses, f est-elle injective, surjective ?

1. a) $f(\{\frac{\pi}{3}\}) = \{\cos\frac{\pi}{3}\} = \{\frac{1}{2}\}$

b) $f([-\pi/3, \pi/3]) = \{\cos x \,/\, -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\} = [1/2 ; 1]$

c) $f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in [-\pi/2, \pi/2] \,/\, \cos x = -1\} = \emptyset$

d) $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [-\pi/2, \pi/2] \,/\, \cos x = 0\} = \{-\pi/2, \frac{\pi}{2}\}$

2- D'après 1. d) 0 admet sur E par f deux antécédents ($-\pi/2$ et $\pi/2$) donc f n'est pas injective ; d'après 1. c) -1 n'admet sur E par f aucun antécédent donc f n'est pas surjective.

<u>f n'est ni injective ni surjective.</u>

Exercice 5. Soient $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

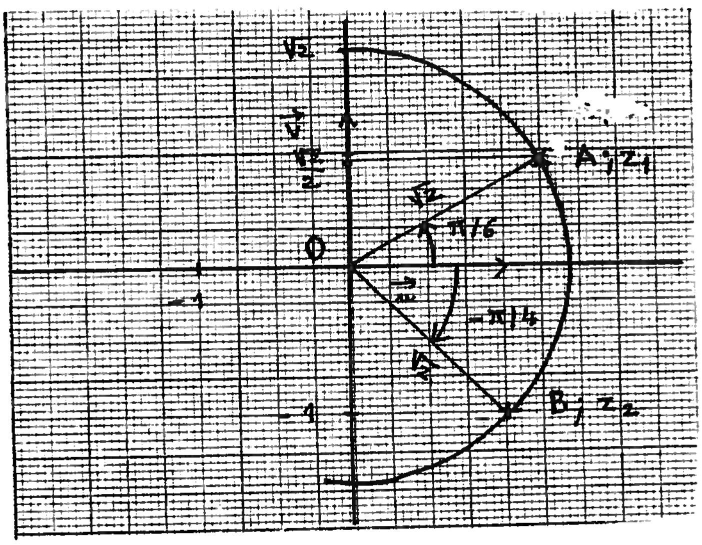
1. Donner la forme trigonométrique (ou exponentielle) de z_1 et z_2. Dans le plan complexe rapporté à $(0, \vec{u}, \vec{v})$, repère orthonormé direct, placer les points A et B d'affixes respectifs z_1 et z_2.
2. Donner la forme algébrique et trigonométrique (ou exponentielle) de z_3, en déduire la valeur de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ des points M d'affixes z vérifiant : $|z - 1 + i| = z_1\bar{z}_1$.

1- $|z_1| = \frac{1}{2}\sqrt{6+2} = \sqrt{2}$

On cherche $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tel que : $\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \theta_1 = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

$$\underline{z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/6}}$$

$$\underline{z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}}$$ (lecture graphique du module et d'un argument)



2.

$z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1-i}$

$z_3 = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(1+i)}{2}$

$$\underline{z_3 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \quad (1)$$

$z_3 = \dfrac{\sqrt{2}\, e^{i\pi/6}}{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}} = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})} = e^{\frac{5i\pi}{12}}$

$$\underline{z_3 = e^{5i\pi/12} = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)} \quad (2)$$

En égalant parties réelle et imaginaire dans (1) et (2), on obtient :

$$\underline{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.}$$

3. $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$ et $|z-1+i| = |z - z_2|$

Par conséquent : $\mathcal{A} = \{M; z / |z-1+i| = z_1\overline{z_1}\} = \{M / \quad B = 2\}$, soit :

$\mathcal{A}$ est le cercle de centre B ; $1-i$ et de rayon 2.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes :

$$(a)\ z^3 = i \qquad \text{et} \qquad (b)\ z^2 + \sqrt{3}z - i = 0\,.$$

(a) $z^3 = i$

On cherche les racines cubiques de i sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$i = e^{i\pi/2}$ et $z^3 = r^3 e^{3i\theta}$, ainsi : (a) équivaut à

$r^3 e^{3i\theta} = e^{i\pi/2}$ soit à $\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \end{cases}$ $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6}\ \left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$

Les trois racines cubiques de i sont :

$e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; $e^{5i\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ et $e^{9i\pi/6} = e^{-i\pi/2} = -i$

(b) $z^2 + \sqrt{3}z - i = 0$

$\Delta = 3 + 4i$ avec $|\Delta| = \sqrt{3^2 + 16} = 5$

On cherche $\delta = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\delta^2 = \Delta$.

$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ xy > 0 \end{cases}$, donc $\delta = 2 + i$ convient.

Les solutions de (b) sont : $z_1 = \dfrac{-\sqrt{3} + 2 + i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-\sqrt{3} - 2 - i}{2}$

Exercice 7. Attention, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A. Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$.

1. Le nombre complexe i est-il racine de P ?
2. (a) Justifier que 2 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
   (b) En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Partie B. Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels qui vérifient :

$$P(x) = (x-1)P'(x)\,.$$

Partie A.

1. $P(i) = i^4 - 3i^3 + i^2 + 4 = 1 + 3i - 1 + 4 = 4 + 3i$

$P(i) \neq 0$, donc : i n'est pas racine de P.

2 - (a) $P(2) = 2^4 - 3 \times 2^3 + 2^2 + 4 = 16 - 24 + 4 + 4 = 0$

$P'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$ et $P'(2) = 4 \times 8 - 9 \times 4 + 4 = 36 - 36 = 0$

$P''(x) = 12x^2 - 18x + 2$ et $P''(2) = 12 \times 4 - 18 \times 2 + 2 = 14$

$P(2) = P'(2) = 0$ et $P''(2) \neq 0$, donc : 2 est racine double (ordre deux) de P.

(b) Puisque 2 est racine double de P, $(x-2)^2$ divise $P(x)$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +x^2 & & +4 & x^2-4x+4 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +4x^3 & -4x^2 & & & x^2+x+1 \\
\cline{1-5}
 & x^3 & -3x^2 & & +4 & \\
 & -x^3 & +4x^2 & -4x & & \\
\cline{2-5}
 & & x^2 & -4x & +4 & \\
 & & -x^2 & +4x & -4 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Alors $\qquad P(x) = (x-2)^2\,(x^2+x+1)$

$z^2+z+1=0$

$\Delta = -3 = (\sqrt{3}\,i)^2$, soit

$z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j$ et $z_2 = \overline{j} = \dfrac{1}{j}$

Par conséquent :

$\underline{\text{Sur } \mathbb{R} \qquad P(x) = (x-2)^2\,(x^2+x+1)}$ $\qquad$ (x^2+x+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$: polynôme de degré 2 avec $\Delta<0$)

$\underline{\text{Sur } \mathbb{C} \qquad P(x) = (x-2)^2\,(x-j)(x-\overline{j}) \quad \text{où} \quad j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Partie B

... , on trouve :

$\underline{P(x) = a\,(x-1) \quad \text{où} \quad a\in\mathbb{R}}$