Un corrigé de l'examen décembre 2011

Exercice 1

Pour tout réel m, $A_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & m & -2 \\ 1 & -m & 2 \end{pmatrix}$ et $(S_m) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ mx + my - 2z = 2 \\ x - my + 2z = 1 \end{cases}$

1. $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ${}^tA_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_0^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

$\det(A_0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$ et $\det(3A_0) = 3^3 \det(A_0) = 27 \times 2 = 54$

2. $\det(A_0) = 2 \neq 0$, donc A_0 est inversible.

$A_0^{-1} = \dfrac{1}{\det(A_0)}\, {}^t(\mathrm{com}(A_0))$ avec $\det(A_0) = 2$ et $\mathrm{com}(A_0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, donc :

$$\underline{A_0^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

3. A_m est inversible si, et seulement si : $\det(A_m) \neq 0$.

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & m & -2 \\ 1 & -m & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & m & -1 \\ 1 & -m & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2m & -1-m \\ 1 & 1-m & 0 \end{vmatrix} = 2 \times (+1) \times \begin{vmatrix} 2m & -1-m \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} = 2\,(1+m)(1-m)$$

<u>A_m est inversible si, et seulement si : $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.</u>

4. $\underline{(S_m) : \ A_m \cdot X = B \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \text{et} \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$

(S_m) admet une unique solution si, et seulement si : A_m est inversible. Donc grâce à 3.,
<u>(S_m) admet une unique solution si, et seulement si : $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.</u>

5. • D'après 4., (S_0) : $A_0 \cdot X = B$ admet une unique solution.

$$A_0 \cdot X = B \iff X = A_0^{-1} \cdot B$$

D'après 2., $A_0^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc : $\underline{\mathcal{S}_0 = \{(3, 0, -1)\}}$.

•• $(S_1) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2y - 4z = 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + y - 2z = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} + 2z \end{cases}$

$$\underline{\mathcal{S}_1 = \left\{ \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2} + 2z, z \right) \ / \ z \in \mathbb{R} \right\}}$$

••• $(S_{-1}) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x - y - 2z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$ Puisque $-2 \neq 1$, L_2 et L_3 sont incompatibles : (S_{-1}) est incompatible.

$$\underline{\mathcal{S}_{-1} = \emptyset}$$

Exercice 2

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 1$, dont on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Les fonctions réelles : $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x-1$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même pour leur somme : f.

<u>f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.</u>

2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -x-1 = +\infty \end{array}\right\}$ D'après les théorèmes usuels de limite : $\underline{\lim\limits_{-\infty} f = +\infty}$.

$f(x) = e^x \left(1 - \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x} \right)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \quad \text{(croissance comparée)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 \end{array}\right\}$ D'après les théorèmes usuels de limite : $\underline{\lim\limits_{+\infty} f = +\infty}$.

3. Pour tout x réel, $f(x) = -x-1+e^x$ avec $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, par conséquent :

<u>la droite $\Delta : y = -x-1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.</u>

De plus, pour tout x réel, $f(x) - (-x-1) = e^x > 0$, donc :

<u>sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}$ est (strictement) au-dessus de Δ.</u>

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$.

$$e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$$

ce qui précède et 2. se résument dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$0 = f(0)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, donc :

<u>f est positive sur $\mathbb{R}$</u> ($\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$).

$\mathscr{C}$ est située au-dessus de l'axe des abscisses.

5. La dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ assure que $\mathscr{C}$ admet en tout point d'abscisse a, où $a \in \mathbb{R}$, une tangente T_a : la droite d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

<u>$T_a : y = (e^a - 1)(x-a) + e^a - a - 1$.</u>

Le coefficient directeur de T_a est $e^a - 1$, celui de $\Delta : y = -x-1$ est -1 ; or, $e^a - 1 > -1$ car $e^a > 0$ donc T_a et Δ sont sécantes au point d'abscisse x solution de l'équation :

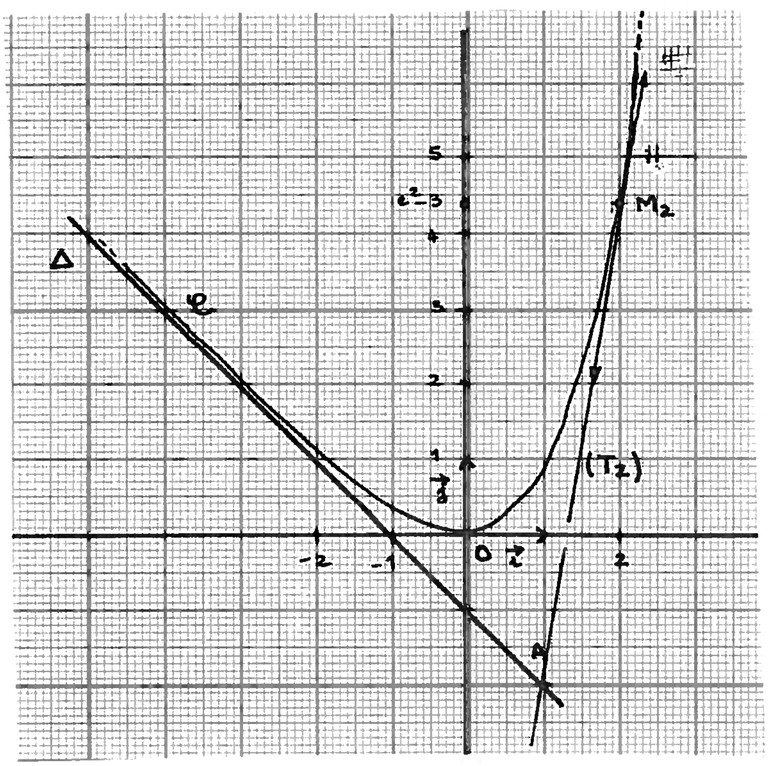
$$(e^a - 1)(x-a) + e^a - a - 1 = -x-1$$

$$e^a x - x - ae^a + a + e^a - a - 1 = -x - 1$$

$$e^a x = e^a(a-1), \quad \text{soit } x = a-1 \text{ car } e^a > 0.$$

<u>$T_a \cap \Delta = \{A\}$ où $A(a-1 ; -a)$</u>

6.



On trace Δ puis T_2 :
T_2 passe par le point M_2 de $\mathscr{C}$: celui de coordonnées $(2, e^2-3)$, $e^2 - 3 \simeq 4{,}4$, et d'après 5- coupe Δ au point A de coordonnées $(1, -2)$.

Exercice 3

I. La fonction arctan est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$(\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. De plus, $\lim\limits_{+\infty} \arctan = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{-\infty} \arctan = -\dfrac{\pi}{2}$.

II.

1. Théorème des accroissements finis.

Soit (a,b) un couple de réels tel que : $a < b$.
Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors :
Il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c)$.

2. D'après I. et II.1., on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction arctan sur le segment $[n, n+1]$, où $n \in \mathbb{N}$:

$\exists\, c_n \in]n, n+1[$: $\quad \arctan(n+1) - \arctan(n) = (n+1-n)\dfrac{1}{1+c_n^2} = \dfrac{1}{1+c_n^2}$.

or, $\quad n < c_n < n+1$, donc

$1+n^2 \leq 1+c_n^2 \leq 1+(n+1)^2 \qquad$ ($x \mapsto 1+x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$)

$\dfrac{1}{1+(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{1+c_n^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2} \qquad$ ($x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), d'où le résultat :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{1}{1+(n+1)^2} \leq \arctan(n+1) - \arctan(n) \leq \dfrac{1}{1+n^2}$.

3. Soit u la suite réelle de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+k^2}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1+k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{1+(n+1)^2} > 0.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n > 0$: u est (strictement) croissante.

b) Si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $k-1 \in \mathbb{N}$ et en posant $n = k-1$ dans la double inégalité obtenue en 2. :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{1+k^2} \leq \arctan(k) - \arctan(k-1)$.

c) En sommant pour k variant de 1 à n, où $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités précédentes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\arctan(k) - \arctan(k-1) \right)$$

or, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$ et par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\arctan(k) - \arctan(k-1)\right) = \arctan(n) - \arctan(0)$

avec $\arctan(0) = 0$, par conséquent :

$$u_n \leq \arctan(n)$$

La fonction arctan est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, donc :

$$\arctan(n) < \pi/2.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \pi/2 \quad$: u est majorée par $\pi/2$.

d) La suite u est croissante (a)), majorée par $\pi/2$ (c)), donc :
u converge vers un réel l, $l \leq \pi/2$.

Exercice 4

Soit $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.

1. $P(i) = i^4 + i^3 + 2i^2 + i + 1 = 1 - i - 2 + i + 1 = 0$

$P'(X) = 4X^3 + 3X^2 + 4X + 1$, donc $P'(i) = 4i^3 + 3i^2 + 4i + 1 = -4i - 3 + 4i + 1 = -2$

$P(i) = 0$ et $P'(i) \neq 0$: i est racine simple (d'ordre 1) de P.

2. P est un polynôme à coefficients réels, donc puisque i est racine simple de P, il en est de même de son conjugué : $-i$; par conséquent : $(X-i)(X+i) = X^2+1$ divise P.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +X^3 & +2X^2 & +X & +1 & X^2+1 \\
\cline{6-6}
-X^4 & & -X^2 & & & X^2+X+1 \\
\cline{1-5}
 & X^3 & +X^2 & +X & +1 & \\
 & -X^3 & & -X & & \\
\cline{2-5}
 & & X^2 & & +1 & \\
 & & -X^2 & & -1 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$P = (X^2+1)(X^2+X+1)$

Le complexe z est racine de P équivaut successivement à :

$P(z) = 0$

$z^2+1 = 0$ ou $z^2+z+1 = 0$

$z = i$ ou $z = -i$ ou $\Delta = -3 = (\sqrt{3}\,i)^2$, $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} = e^{2i\pi/3}$ ou $z = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} = e^{-2i\pi/3}$

Les racines complexes de P sont :

$i,\ -i,\ -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (forme algébrique)

$e^{i\pi/2},\ e^{-i\pi/2},\ e^{2i\pi/3},\ e^{-2i\pi/3}$ (forme exponentielle)