CHAPITRE 1 Exercices supplémentaires

Exercice 1 Résoudre de manière rigoureuse les équations suivantes :

$$x^4 = 4096\,, \quad x^4 = -4096$$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(a) \quad x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \quad (b) \quad x^4 + 3x^2 - 4 \leq 0$$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$:
(a) $\sqrt{2x+3} = 5x - 12$
(b) $\sqrt{x+4} \leq x + 2$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$:
(a) $|x+3| = 4$
(b) $|x+3| < 4$
(c) $-1 < |2-x| \leq 4$
(d) $|x+5| = |x-2|$

Exercice 5
1. Soient x et y deux réels tels que $-2 \leq x \leq -1$ et $1/4 \leq y \leq 3/2$.
   Encadrer $x - y$, xy et x/y.
2. Comparer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ dans les trois cas suivants : $0 < x < y$, $x < y < 0, x < 0 < y$.

Exercice 6
1. Simplifier l'écriture des réels suivants :
   $a = e^{\ln 3} + e^{-\ln 4}\,, \qquad b = \ln(e^{-3}) + e^{\ln 5}\,, \qquad c = \dfrac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}\,, \qquad d = \dfrac{e}{e^{1+\ln 2}}\,,$
2. Donner le domaine de définition des expressions suivantes puis les simplifier :

$$A(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} \qquad B(x) = \ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x})$$
$$C(x) = \ln\left(\frac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right) \quad D(x) = e^{\ln x} - \ln(2e^x) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 7 Soit $f \;:\; x \mapsto |x+1| \times |2x-1|$.
1. Exprimer la fonction f sans valeur absolue selon les valeurs de x.
2. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.

Exercice 8
1. Soient p et q deux entiers naturels tels que : $p < q$. Combien y a-t-il d'entiers k tels que : $p < k < q$?
2. (a) Expliciter : $\quad A = \displaystyle\sum_{j=1}^{4} j^i\,, \quad B = \sum_{i=1}^{3} j^i, \quad C = \sum_{i=2}^{4} i\,, \quad D = \sum_{j=0}^{4} \frac{1}{1+j}.$
   (b) À l'aide du symbole $\sum$, écrire les sommes suivantes : $\quad E = 17 + 19 + 21 + \cdots + 33 + 35,$
   $F = 3^4 + 3^5 + \cdots + 3^{12},\; G = 1 - 2 + 3 - 4 \ldots + (2n-1) - 2n.$

Exercice 9 Soient a et b deux nombres complexes.
1. Rappeler le développement de $(a+b)^n$ (formule du binôme de Newton).
2. Calculer en fonction de n : $D_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ et $E_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$

Exercice 10

1. Soit a un nombre réel positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

2. Démontrer par récurrence que pout tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 11

1. Soient p et q deux entiers naturels tels que : $p \leq q$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} (x_{k+1} - x_k)$ (télescopage).

2. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

   En déduire le calcul de $\displaystyle T_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 12 Soient $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Développer $(k+1)^4 - k^4$. En déduire que : $\displaystyle(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$.

2. Calculer $\displaystyle S_{3,n} = \sum_{k=1}^{n} k^3$ en fonction de n.