EXAMEN PARTIEL DE MATHEMATIQUES – DUREE 2H

Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.
Veuillez préciser le numéro de votre groupe sur votre copie.

Exercice 1

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln\left(2 - \mathrm{e}^{-v_n}\right).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul. On définit ensuite la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k, \quad \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$

Le but de l'exercice est déterminer la limite de $(S_n)_{n\geq 1}$. On introduit la suite auxiliaire $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$, pour tout entier naturel n non nul.

1) Calculer u_1 et montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.
2) Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.
4) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis exprimer v_n en fonction de n.
5) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2

1) Déterminer, si elles existent, les limites des suites définies par :

$$u_n = \frac{5n^2 - \cos(n!)}{n^2 + 1}, \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

2) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? **Les réponses seront justifiées**.
   a) Pour toute suite (u_n), (u_n) est majorée ou (u_n) est convergente.
   b) Il existe une suite (u_n) telle que $(u_n - \frac{1}{n})$ converge et $(u_n + \frac{1}{n})$ diverge.
   c) Pour toute suite (u_n), si (u_n^2) est convergente alors (u_n) est convergente.

Exercice 3

En détaillant les étapes, calculer :

$$A = \sum_{k=0}^{100} (k - 50), \qquad B = \sum_{k=1}^{1000} \binom{1000}{k} (-4)^k \, 2^{1000-k},$$

Exercice 4

1) Exprimer le nombre complexe $z_0 = (2+i)^2$ sous forme algébrique.

On considère le polynôme complexe $P(z) = z^3 + (\sqrt{3}+1)z^2 + (\sqrt{3}-i)z - i$.

2) Calculer $P(-1)$.
3) Factoriser $P(z)$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes d'inconnue z dans $\mathbb{C}$:

1) $z^7 = \sqrt{2}\,\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$,
2) $z^5 = \bar{z}$.

Exercice 6

1) On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x+1|. \end{array}$$

   a) Représenter graphiquement cette application.
   b) En déduire les ensembles $f([-3,2])$, $f(\{-2\})$, $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}([-5,2])$.
   c) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle injective ? Est-elle surjective ? **Justifier**.

2) On considère de plus l'application

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x-1|. \end{array}$$

   a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g \circ f(x) = 1$. *On rappelle que* $g \circ f(x) = g(f(x))$.
   b) Représenter graphiquement l'application $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.