# EXAMEN PARTIEL DE MATHEMATIQUES – DUREE 2H

**Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.**
**Veuillez préciser le numéro de votre groupe sur votre copie.**

## Exercice 1 (Vrai / Faux)

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? **Les réponses seront justifiées**.

1. Si le réel $x$ vérifie $-2 \leq x \leq 3$, alors $4 \leq x^2 \leq 9$.
2. L'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = 2n$ est surjective.
3. L'application $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $g(n) = 3n + 2$ est injective.
4. Si la suite $(u_n)$ est croissante et non majorée, alors $\lim u_n = +\infty$.

## Exercice 2

Soit $(u_n)$ la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. La suite $(u_n)$ est-elle monotone ? Justifier.
3. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.
4. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)$.

## Exercice 3

On considère une application $f : E \to F$.

1. Pour $A \subset E$, donner la définition de l'image de $A$ par $f$, $f(A)$.
2. Pour $B \subset F$, donner la définition de l'image réciproque de $B$ par $f$, $f^{-1}(B)$.
3. Pour l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, donner

$$f([-1,1]), \quad f([-2,-1] \cup [0,1]), \quad f([-2,-1]) \cap f([0,1]) \quad \text{et} \quad f^{-1}([-2,3]).$$

**Exercice 4**
En détaillant les étapes, calculer

$$A = \sum_{k=0}^{9} (2k-9), \qquad B = \sum_{k=0}^{200} i^k, \qquad C = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (-2)^k.$$

**Exercice 5**

1. On considère le nombre complexe $z_0 = -8 - 6i$.
   (a) Calculer le module $|z_0|$ et donner la forme algébrique du conjugué $\overline{z_0}$ et de l'inverse $\dfrac{1}{z_0}$.
   (b) Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées du nombre complexe $z_0$.
2. On considère le polynôme complexe $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + (3+3i)z - 2 - 2i$.
   (a) Montrer que 1 est racine de $P$ et donner son ordre de multiplicité.
   (b) Déterminer les autres racines de $P$ dans $\mathbb{C}$.
   (c) L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $z \mapsto P(z)$ est-elle injective ? Justifier.

**Exercice 6**
On considère la fonction de la variable réelle $f(x) = 5 - \dfrac{4}{\sqrt{x+1}}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner le domaine de définition de $f$.
2. Démontrer que $f([0, +\infty[) \subset [0, +\infty[$ et en déduire que la suite est bien définie.
3. Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire que :
   $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
4. Calculer $u_1$ et comparer à $u_0$.
5. Étudier par récurrence la monotonie de la suite $(u_n)$.
6. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
7. Déterminer $\lim u_n$.

**Exercice 7 (Exercice bonus)**
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme réel $P_n(x) = x^{2n} + nx + 1$. Déterminer, en fonction de $n$, le reste de la division euclidienne de $P_n(x)$ par $x^2 - 1$.