EXAMEN PARTIEL DE MATHEMATIQUES – DUREE 2H

Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.
Veuillez préciser le numéro de votre groupe sur votre copie

Exercice 1.

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
   (a) Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   (P) : la suite u est croissante,
   (Q) : la suite u est majorée par 2.
   (b) On suppose (P) et (Q) vraies ; qu'en déduisez-vous pour u ?
2. On considère l'assertion suivante :

$$(R)\ :\ \forall\epsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0\,,\ |u_n - 2| \leq \epsilon\,.$$

   (a) Que peut-on dire de la suite u ?
   (b) Donner un exemple d'une suite réelle vérifiant (R).
   (c) Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion *non*(R) qui est la négation de (R).

Exercice 2.

1. On considère la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de terme général

$$u_n = \frac{2n}{n+1}\,.$$

   (a) Que vaut le terme u_{n+1} ?
   (b) Démontrer que la suite u est croissante.
   (c) La suite u est-elle majorée ? est-elle minorée ?
   (d) Quelle est la limite de cette suite ?
2. Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle des suites de terme général :

$$(a)\quad u_n = n^2 - n + (-1)^n, \qquad (b)\quad u_n = \frac{n^2 + 2\,n + 3}{\cos(n^2) - 2\,n^2}, \qquad (c)\quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Exercice 3.

1. Déterminer les racines carrées de $\Delta = 8 - 6i$.
2. En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}z + \frac{3}{2}i = 0$.

Exercice 4. Soit P la fonction polynomiale définie par :

$$P(x) = x^4 - x^3 - x + 1\,.$$

1. Justifier que 1 est racine de P dans $\mathbb{C}$ et déterminer son ordre de multiplicité.
2. En déduire toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ qu'on donnera sous forme algébrique et exponentielle.

Exercice 5. Démontrer (par récurrence) que pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 \times 2 \;+\; 2 \times 3 \;+\; \cdots \;+\; n \times (n+1) \;=\; \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,.$$

Exercice 6. Soit $f \,:\, E \to F$ l'application définie par $f(x) = x^2$.

1. Donner deux ensembles E et F tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner deux ensembles E et F tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner deux ensembles E et F tels que f soit ni injective ni surjective.
4. Donner deux ensembles E et F tels que f soit injective et surjective.